Cálculo Integral

Nesta unidade, passaremos a nos preocupar com o teorema mais importante do cálculo diferencial, que é o Teorema Fundamental do Cálculo. É importante que você compreenda esta temática antes de prosseguir seus estudos. Não esqueça que você não está sozinho, conte com o Sistema de Acompanhamento para auxiliar-lo nas suas dúvidas.

Função primitiva

No estudo da derivada primitiva, tínhamos uma função e obtivemos, a partir dela, uma outra, a que chamamos de *derivada*. Nesta seção, faremos o caminho inverso, isto é, dada a derivada, vamos encontrar ou determinar uma função original, que chamaremos de primitiva. Você deve observar ,que é importante conhecer bem as regras de derivação e as derivadas de várias funções, estudadas no Capítulo 5, para determinar as primitivas. O que acabamos de mencionar, nos motiva a seguinte definição:

Uma função $F(x)$ *é chamada uma* ***primitiva*** *da função* $f(x)$ *em um intervalo* I, *se para todo* $x \in I$, *tem-se*

$$F'(x) = f(x).$$

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 7.1 *A função* $F(x) = \dfrac{x^5}{5}$ *é uma primitiva da função* $f(x) = x^4$, *pois*

$$F'(x) = \frac{5\,x^4}{5} = x^4 = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Exemplo 7.2 *As funções* $T(x) = \dfrac{x^5}{5} + 9$, $H(x) = \dfrac{x^5}{5} - 2$ *também são primitivas da função* $f(x) = x^4$, *pois* $T'(x) = H'(x) = f(x)$.

Exemplo 7.3 A função $F(x) = \dfrac{e^{-3x}}{-3}$ é uma primitiva da função $f(x) = e^{-3x}$, pois

$$F'(x) = \frac{-3 \times e^{-3x}}{-3} = e^{-3x} = f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 7.4 A função $F(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ é uma primitiva da função $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, pois

$$F'(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \times x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = f(x), x > 0.$$

Observação *Seja I um intervalo em $\mathbb{R}$. Se $F : I \to \mathbb{R}$ é uma primitiva de $f : I \to \mathbb{R}$, então para qualquer constante real k, a função $G(x)$ dada por $G(x) = F(x) + k$ é também uma primitiva de $f(x)$.*

Se $F, G : I \to \mathbb{R}$ são primitivas de $f : I \to \mathbb{R}$, então existe uma constante real k, tal que $G(x) = F(x) + k$, para todo $x \in I$.

Exemplo 7.5 *Sabemos que* $(\text{sen } x)' = \cos x$. *Assim,* $F(x) = \text{sen } x$ *é uma primitiva da função* $f(x) = \cos x$ *e toda primitiva da função* $f(x) = \cos x$ *é do tipo* $G(x) = \text{sen } x + k$ *para* $k \in \mathbb{R}$.

Assim, $G_1(x) = \text{sen } x + 10$, $G_2(x) = \text{sen } x - 50$ *e* $G_3(x) = \text{sen } x - \dfrac{3}{4}$ *são todas primitivas da função* $f(x) = \cos x$, *pois*

$$G_1'(x) = G_2'(x) = G_3'(x) = \cos x = f(x).$$

Exemplo 7.6 *Encontrar uma primitiva* $F(x)$, *da função* $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 1$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$, *que satisfaça a seguinte condição* $F(1) = 4$.

Resolução: Pela definição de função primitiva temos $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, assim, $F(x)$ será uma função cuja derivada será a função $f(x)$ dada. Logo,

$$F(x) = \frac{2}{4}x^4 - 4\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} - x + k,$$

pois

$$F'(x) = \frac{2}{4} \cdot 4x^3 - 4 \cdot 3\frac{x^2}{3} + 5 \cdot 2\frac{x}{2} - 1 + 0$$

$$= 2x^3 - 4x^2 + 5x - 1 = f(x),$$

ou seja,

$$F(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} - x + k.$$

Como $F(x)$ deve satisfazer a condição $F(1) = 4$, vamos calcular o valor da constante k, fazendo $x = 1$ na função $F(x)$,
isto é,

$$F(1) = \frac{1}{2}(1)^4 - 4\frac{(1)^3}{3} - 5\frac{(1)^2}{2} - 1 + k = 4$$

e resolvendo temos $k = \dfrac{10}{4}$.

Assim,

$$F(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} - x + \frac{10}{3}.$$

Portanto,

$$F(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} - x + \frac{13}{3},$$

é uma função primitiva de

$$f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 1,$$

que satisfaz condição $F(1) = 4$.

Exemplo 7.7 *Encontrar uma primitiva* $F(x)$, *da função*

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2} + x^3 + 2,$$

que satisfaça a seguinte condição $F(0) = 2$.

Resolução: Sabemos que $F(x)$ é uma função cuja derivada é a função $f(x)$ dada. Conforme visto no Capitulo 5, temos

$$\frac{d}{dx}\left(arc\ \text{tg}\ x\right) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{ou} \quad \left(arc\ \text{tg}\ x\right)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Logo,

$$F(x) = arc\ \text{tg}\ x + \frac{x^4}{4} + 2x + k,$$

pois,

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= \left(arc\ \text{tg}\ x\right)' + \left(\frac{x^4}{4}\right)' + (2x)' + k' \\
&= \frac{1}{1+x^2} + \frac{4x^3}{4} + 2 + 0 \\
&= \frac{1}{1+\ x^2} + x^3 + 2 = f(x),
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$F(x) = arc\ \text{tg}\ x + \frac{x^4}{4} + 2\ x + k\,.$$

Como $F(x)$ deve satisfazer a condição $F(0) = 2$, com isto vamos calcular o valor da constante k fazendo $x = 0$ na função $F(x)$, isto é,

$$
\begin{aligned}
& F(x) = arc\ \text{tg}\ x + \frac{x^4}{4} + 2x + k \\
& \Rightarrow\ F(0) = arc\ \text{tg}\ 0 + \frac{0^4}{4} + 2\cdot 0 + k = 2 \\
& \Rightarrow 0 + 0 + 0 + k = 2\ \Rightarrow\ k = 2
\end{aligned}
$$

Assim,

$$F(x) = arc\ tg\ x + \frac{x^4}{4} + 2x + 2\ \,.$$

Portanto,

$$F(x) = arc\ tg\ x + \frac{x^4}{4} + 2x + 2$$

é uma função primitiva de

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} + x^3 + 2$$

que satisfaz a condição $F(0) = 2$.

Exemplo 7.8 *Encontrar uma primitiva* $F(x)$, *da função*

$$f(x) = e^{-3x} + \sqrt{x}\,,$$

que satisfaça a condição $F(0) = 1$.

Resolução: Sabemos que $F(x)$ será uma função cuja derivada será a função $f(x)$ dada, logo

$$F(x) = -\frac{e^{-3x}}{3} + \frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}} + k,$$

pois,

$$F'(x) = \left(-\frac{e^{-3x}}{3}\right)' + \left(\frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}}\right)' + k$$
$$= -(-3)\frac{e^{-3x}}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\,x^{\frac{3}{2}-1}$$
$$= e^{-3x} + x^{\frac{1}{2}} = e^{-3x} + \sqrt{x} = f(x),$$

ou seja,

$$F(x) = -\frac{e^{-3x}}{3} + \frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}} + k.$$

Como $F(x)$ deve satisfazer a condição $F(0) = 1$, com isto vamos calcular o valor da constante k fazendo $x = 0$ na função $F(x)$, isto é,

$$F(x) = -\frac{e^{-3x}}{3} + \frac{2}{3}\,.\,x^{\frac{3}{2}} + k$$
$$\Rightarrow \; F(0) = -\frac{e^{-3\,.\,0}}{3} + \frac{2}{3}\,.\,0^{\frac{3}{2}} + k = 1$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot 0 + k = 1$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{3} + 0 + k = 1 \qquad .$$
$$\Rightarrow k = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow k = \frac{4}{3}$$

Assim,

$$F(x) = -\frac{e^{-3x}}{3} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{3}.$$

Portanto, $F(x) = -\dfrac{e^{-3x}}{3} + \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \dfrac{4}{3}$, é uma função primitiva de $f(x) = e^{-3x} + \sqrt{x}$ que satisfaz a condição $F(0) = 1$.

Integral indefinida

Sabemos que a derivada é um dos conceitos mais importantes do Cálculo. Outro conceito também muito importante é o de Integral. Existe uma estreita relação entre estas duas idéias. Assim, nesta seção, será introduzida a idéia de integral, mostrando sua relação com a derivada.

Se a função $F(x)$ é primitiva da função $f(x)$, a expressão $F(x)+C$ é chamada ***integral indefinida*** *da função $f(x)$ e é denotada por*

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C$$

onde

$\int$ – *é chamado sinal de integração;*

$f(x)$ – *é a função integrando;*

dx – *a diferencial que serve para identificar a variável de integração;*

C – *é a constante de integração.*

Lê-se: Integral indefinida de $f(x)$ em relação a x ou simplesmente integral de $f(x)$ em relação a x.

O processo que permite encontrar a integral indefinida de uma função é chamado **integração**.

Observação *Da definição de integral indefinida, temos as seguintes observações:*

(i) $\int f(x)\,dx = F(x)+C \;\Leftrightarrow\; F'(x) = f(x)$.

(ii) $\int f(x)\,dx$ *representa uma família de funções, isto é, a família ou o conjunto de todas as primitivas da função integrando.*

(iii) $\dfrac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = \dfrac{d}{dx}\left(F(x)+C\right) = \dfrac{d}{dx}F(x) = F'(x) = f(x)$.

Vejamos alguns casos, no exemplo a seguir.

Exemplo 7.9

(i) Se $\frac{d}{dx}(senx) = \cos x$ *então* $\int \cos x \, dx = senx + C$.

(ii) Se $\frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$ *então* $\int 4x^3 dx = x^4 + C$.

(iii) Se $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ *então* $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx = \sqrt{x} + C$.

(iv) Se $\frac{d}{dx}(tg\ x) = \sec^2 x$ *então* $\int \sec^2 x \, dx = tgx + C$.

(v) Se $\frac{d}{dx}(arctg\ x) = \frac{1}{1+x^2}$ *então* $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = arctgx + C$.

(vi) Se $\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}}\right) = x^{\frac{2}{3}}$, *então* $\int x^{\frac{2}{3}} \, dx = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + C$.

Observação *Pelos exemplos acima, temos:*

$$\int f(x) \, dx = F(x) + C \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\int f(x) dx\right) = f(x).$$

Isto nos permite que obtenhamos fórmulas de integração diretamente das fórmulas para diferenciação.

Propriedades da integral indefinida

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções reais definidas no mesmo domínio e k uma constante real. Então:

a) $\int k \, f(x) \, dx = k \int f(x) \, dx$.

b) $\int (f(x) + g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$.

Algumas integrais imediatas

Daremos a seguir algumas fórmulas de integrais simples e imediatas.

(i) $\int dx = x + C$.

(ii) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{x+1} + C, \quad n \neq -1$.

(iii) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

(iv) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1$.

(v) $\int e^x dx = e^x + C$.

(vi) $\int \text{sen } x \, dx = -\cos x + C$.

(vii) $\int \cos x \, dx = \text{sen } x + C$.

(viii) $\int \text{tg } x \, dx = \ln|\sec x| + C$.

(ix) $\int \text{cotg } x \, dx = \ln|\text{sen } x| + C$.

(x) $\int \sec x \, du = \ln|\sec x + \text{tg } x| + C$.

(xi) $\int \text{cosec } x \, dx = \ln|\text{cosec } x - \text{cotg } x| + C$.

(xii) $\int \sec x \, \text{tg } x \, dx = \sec x + C$.

(xiii) $\int \text{cosec } x \, \text{cotg } x \, dx = -\text{cosec } x + C$.

(xiv) $\int \sec^2 x \, dx = \text{tg } x + C$.

(xv) $\int \text{cosec}^2 x \, dx = -\text{cotg } x + C$.

(xvi) $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} \, arc \text{ tg} \dfrac{x}{a} + C$.

(xvii) $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad x^2 > a^2$.

(xviii) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C$.

(xix) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$.

(xx) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arc \text{ sen} \dfrac{x}{a} + C, \quad x^2 < a^2$.

(xxi) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} arc \sec\left|\frac{x}{a}\right| + C$.

Observação *Apesar de que não estudarmos as funções inversas trigonométricas, mas nas integrais (xvi), (xx) e (xxi) as respostas das integrais é em termos de funções inversas. Estas integrais foram colocadas aqui, apenas para cumprir a tabela. Para conhecimento do leitor:* $arc \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}^{-1} x$, $arc \operatorname{sen} x = sen^{-1} x$ *e* $arc \sec x = \sec^{-1} x$.

Usando as propriedades da integral e a tabela de integrais imediatas, vamos calcular, através de alguns exemplos, a integral de funções.

Exemplo 7.10 *Calcular*

$$\int \left(7x^4 + \sec^2 x\right) dx .$$

Resolução: Das propriedades da integral indefinida e da tabela de integrais imediatas, temos

$$\begin{aligned} &\int \left(7x^4 + \sec^2 x\right) dx \\ &= 7 \int x^4 \, dx + \int \sec^2 x \, dx \\ &= 7\frac{x^{4+1}}{4+1} + C_1 + \operatorname{tg} x + C_2 = 7\frac{x^5}{5} + \operatorname{tg} x + C_1 + C_2 , \end{aligned}$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias.

Como a soma $C_1 + C_2$ é uma nova constante arbitrária, você escreve $C_1 + C_2 = C$ e vem

$$7\frac{x^5}{5} + \operatorname{tg} x + C_1 + C_2 = 7\frac{x^5}{5} + \operatorname{tg} x + C .$$

Portanto,

$$\int \left(7x^4 + \sec^2 x\right) dx = 7\frac{x^5}{5} + \operatorname{tg} x + C .$$

Atenção:

Sempre que você tiver uma soma de duas ou mais integrais indefinidas, escreva apenas ***uma constante*** *para indicar a soma das várias constantes de integração.*

Exemplo 7.11 *Calcular*

$$\int \left(3\, e^{x} + \frac{1}{4\, x} - \operatorname{sen} x \right) dx .$$

Resolução: Das propriedades da integral, vem

$$\begin{aligned}
\int \left(3\, e^{x} + \frac{1}{4\, x} - \operatorname{sen} x \right) dx &= \int 3e^{x}\, dx + \int \frac{1}{4\, x}\, dx - \int \operatorname{sen} x\, dx \\
&= 3\int e^{x}\, dx + \int \frac{1}{4} \frac{dx}{x} - \int \operatorname{sen} x\, dx \\
&= 3\int e^{x} dx + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x} - \int \operatorname{sen} x\, dx \\
&= 3e^{x} + \frac{1}{4}\ln|x| - (-\cos\, x) + C \\
&= 3e^{x} + \frac{1}{4}\ln|x| + \cos x + C ,
\end{aligned}$$

onde utilizamos os resultados da Tabela (v), (iii) e (vii), respectivamente.

Portanto,

$$\int \left(3\, e^{x} + \frac{1}{4\, x} - \operatorname{sen} x \right) dx = 3e^{x} + \frac{1}{4}\ln|x| + \cos x + C .$$

Exemplo 7.12 *Calcular*

$$\int \left(4e^{x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^{2} x} + \frac{4}{x^{5}} \right) dx .$$

Resolução: Aplicando as propriedades da integral e como $\cos^{2} x = \cos x . \cos x$, vem

$$\begin{aligned}
&\int \left(4e^{x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^{2} x} + \frac{4}{x^{5}} \right) dx \\
&= \int 4\, e^{x}\, dx - \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^{2}\, x}\, dx + \int \frac{4}{x^{5}}\, dx \\
&= 4 \int e^{x}\, dx - \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x \times \cos x}\, dx + \int 4 \times \frac{1}{x^{5}}\, dx \\
&= 4\int e^{x}\, dx - \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos\, x} \times \frac{1}{\cos\, x}\, dx + 4\int x^{-5}\, dx
\end{aligned}$$

$$= 4\int e^x\,dx - \int \text{tg}\,x \times \sec x\,dx + 4\int x^{-5}\,dx$$

$$= 4\int e^x\,dx - \int \sec x \times \text{tg}\,x\,dx + 4\int x^{-5}\,dx$$

$$= 4\,e^x - \sec x + 4\,\frac{x^{-5+1}}{-5+1} + C$$

$$= 4\,e^x - \sec x + 4\,\frac{x^{-4}}{-4} + C$$

$$= 4e^x - \sec x + \frac{x^{-4}}{-1} + C$$

$$= 4\,e^x - \sec x - x^{-4} + C$$

$$= 4e^x - \sec x - \frac{1}{x^4} + C.$$

Portanto,

$$\int\left(4\,e^x - \frac{\text{sen}\,x}{\cos^2 x} + \frac{4}{x^5}\right)dx = 4\,e^x - \sec x - \frac{1}{x^4} + C.$$

Exemplo 7.13 *O custo fixo de produção da empresa "Sorriso e Esperança" é R\$8.000,00. O custo marginal é dado pela função* $C'(x) = 0{,}03x^2 + 0{,}12x + 5$. *Determinar a função custo total.*

Resolução: Sabemos que o custo marginal $C'(x)$ é a derivada da função custo total $C(x)$. Assim, para encontrarmos $C(x)$ devemos calcular a integral indefinida da função custo marginal, ou seja,

$$C(x) = \int C'(x)\,dx = \int\left(0{,}03x^2 + 0{,}12x + 5\right)dx$$

$$= \int 0{,}03x^2 dx + \int 0{,}12x\,dx + \int 5\,dx$$

$$= 0{,}03\int x^2 dx + 0{,}12\int x\,dx + 5\int dx$$

$$= \frac{0{,}03}{3}x^3 + \frac{0{,}12}{2}x^2 + 5x + K.$$

Logo,

$$C(x) = 0{,}01x^3 + 0{,}06x^2 + 5x + k.$$

Quando a produção for nula, $x = 0$, o custo fixo será R\$8.000,00, ou seja,

$$8.000 = 0{,}01(0)^3 + 0{,}06(0)^2 + 5(0) + k \text{ e } k = 8.000.$$

Portanto, a função custo total é

$$C(x) = 0{,}01x^3 + 0{,}06x^2 + 5x + 8.000.$$

Exemplo 7.14 *O custo marginal para produção de determinado bem, é dado pela função* $C'(x) = 18\sqrt{x} + 4$. *Se o custo fixo é de R\$50,00, escreva a função custo total.*

Resolução: O custo marginal $C'(x)$ é a derivada da função custo total $C(x)$. Assim, para encontrarmos $C(x)$ devemos calcular a integral indefinida da função custo marginal, ou seja,

$$\begin{aligned} C(x) &= \int C'(x)\,dx = \int \left(18\sqrt{x} + 4\right) dx \\ &= \int \left(18\sqrt{x}\right) dx + \int 4dx = 18\int \sqrt{x}\,dx + 4\int dx \\ &= 18\int x^{\frac{1}{2}} dx + 4\int dx \\ &= 18 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 4x + k = 12x^{\frac{3}{2}} + 4x + k. \end{aligned}$$

Logo,

$$C(x) = 12x^{\frac{3}{2}} + 4x + k$$

Quando a produção for nula, $x = 0$, o custo fixo será R\$ 50,00, ou seja,

$$50 = 12 \cdot (0)^{\frac{3}{2}} + 4 \cdot 0 + k \text{ e } k = 50.$$

Portanto, a função custo total é

$$C(x) = 12x^{\frac{3}{2}} + 4x + 50.$$

Conseguiu acompanhar o conteúdo estudado até aqui? Para saber se aprendeu, procure resolver os exercícios propostos sobre função primitiva e integral. Caso encontre dificuldades, busque apoio junto ao Sistema de Acompanhamento.

Exercícios propostos – 1

1) Determinar a função primitiva $F(x)$ da função $f(x)$, onde

a) $f(x) = 5x^2 + 7x + 2$.

b) $f(x) = x^{-\frac{5}{4}}$.

c) $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$.

d) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ para $x > 1$.

e) $f(x) = e^{4x}$.

2) Encontrar uma função primitiva $F(x)$ da função $f(x)$ dada, que satisfaça a condição inicial dada, onde

a) $f(x) = 2\ \text{sen}\ x + \cos x - \dfrac{1}{2}x^2$ tal que $F(\dfrac{\pi}{4}) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $f(x) = x^{-\frac{2}{3}} + x$ tal que $F(1) = \dfrac{1}{2}$.

c) $f(x) = \sec x \times \text{tg}\, x + \cos x$ tal que $F(\dfrac{\pi}{3}) = 2$.

d) $f(x) = x\sqrt[3]{x} + e^x$ tal que $F(0) = 2$.

e) $f(x) = \cos x - \text{sen}\ x$ tal que $F(0) = 0$.

3) Calcular as integrais

a) $\int (x-2)^2 \times (x+2)^2\, dx$.

b) $\int \dfrac{x^{-\frac{1}{3}} + 2}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx$.

c) $\int \left(\dfrac{x^5 + 2x^{-\frac{1}{2}} + 3}{x^2} \right) dx$.

d) $\int (4 - x - x^2)\, dx$.

i) $\int \dfrac{1}{x^3}\, dx$.

Os exercícios propostos nesta seção, contribuirão para amadurecer os conceitos que acabamos de apresentar. As propriedades apresentadas nesta seção, serão utilizadas durante o curso. Por este motivo, é extremamente importante que você tenha resolvido corretamente a

Integral definida

Nas Unidades 5 e 6, tratamos da derivada e suas aplicações. A derivada é um dos conceitos mais importantes do cálculo. Outro conceito também muito importante é o de integral.

Existem dois problemas fundamentais em cálculo: o primeiro é encontrar a inclinação de uma curva em um ponto dado e o segundo é encontrar a área sob a curva. Você viu, na Unidade 5, que o conceito de derivada está ligado ao problema de traçar à tangente a uma curva.

Agora, você verá que a integral está ligada ao problema de determinar a área de uma figura plana qualquer. Assim, a derivada e a integral são as duas noções básicas em torno das quais se desenvolve todo o cálculo.

Caso tenha dúvidas anote e esclareça antes de prosseguir.

Desejamos que você, nesta seção, possa compreender o conceito de integral definida.

Conceito de área

Já sabemos que a integral está ligada ao problema de determinar a área de uma figura plana qualquer. Por isso, motivaremos o entendimento do cálculo de área usando o método do retângulo, de uma região R compreendida entre o gráfico de uma função $f(x)$ com valores positivos, o eixo x, em um intervalo fechado $[a,b]$, conforme figura abaixo

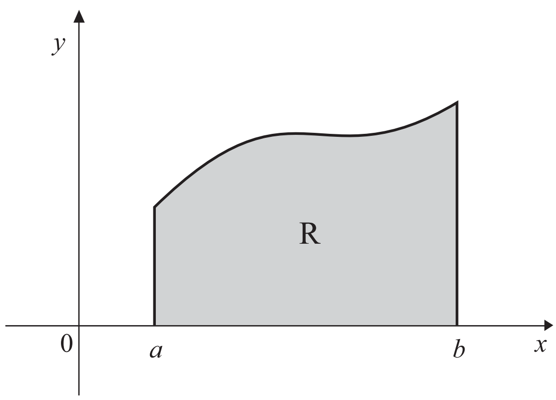

Figura 7.1

Talvez o primeiro contato que você tenha com o conceito de área, seja através da fórmula $A = b \times h$, que dá a área A de um retângulo como o produto da base b pela altura h. Logo a seguir, você tem a área de um triângulo que é igual à metade do produto da base pela altura. Isto decorre do fato de que qualquer triângulo pode ser decomposto em dois triângulos retângulos, e todo triângulo equivale exatamente a meio retângulo, conforme figura abaixo

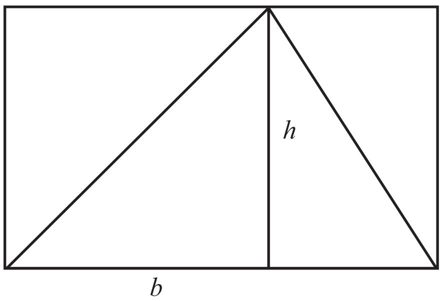

Figura 7.2

Dada a fórmula $A = \frac{1}{2}b \times h$ para a área de um triângulo, pode-se, encontrar a área de qualquer polígono (um subconjunto do plano delimitado por uma "curva" fechada, consistindo em um número finito de segmentos retilíneos).

A razão é que, qualquer figura poligonal pode ser subdividida em triângulos que não se superpõem, e a área do polígono é então a soma das áreas desses triângulos. Essa abordagem de área ,remonta ao Egito e à Babilônia de muitos milênios atrás. Os antigos gregos iniciaram a pesquisa de área de figuras curvilíneas no quinto e quarto século a.C.

Os problemas para o cálculo de área, não apresentam grande dificuldade se a figura plana for um retângulo, um paralelogramo ou um triângulo.

A área de uma figura plana qualquer pode ser calculada aproximando a figura por polígonos, cujas áreas podem ser calculadas pelos métodos da geometria elementar. Isto nos motiva a considerar, agora, o problema de calcular a área de uma região R do plano, limitada por duas retas verticais $x = a$ e $x = b$, pelo eixo x e pelo gráfico de uma função $f(x)$, limitada e não negativa no intervalo fechado $[a,b]$, conforme figura a seguir:

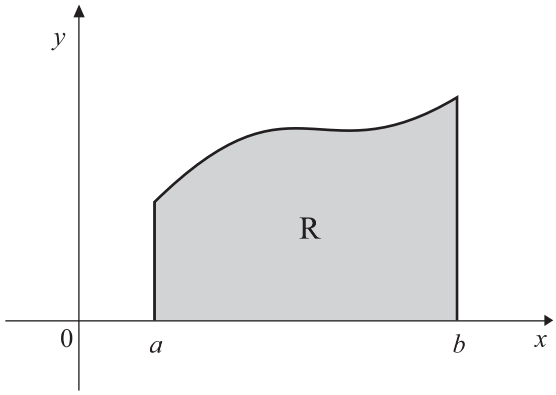

Figura 7.3

Para isso, vamos fazer uma partição P do intervalo $[a,b]$, isto é, vamos dividir o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos, por meio dos pontos

$$x_0 \;,\; x_1 \;,\; x_2 ,\; \ldots \;,\; x_{i-1} \;,\; x_i \;,\; \ldots \;,\; x_n \;,$$

escolhidos arbitrariamente, da seguinte maneira

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b\,,$$

veja a figura abaixo:

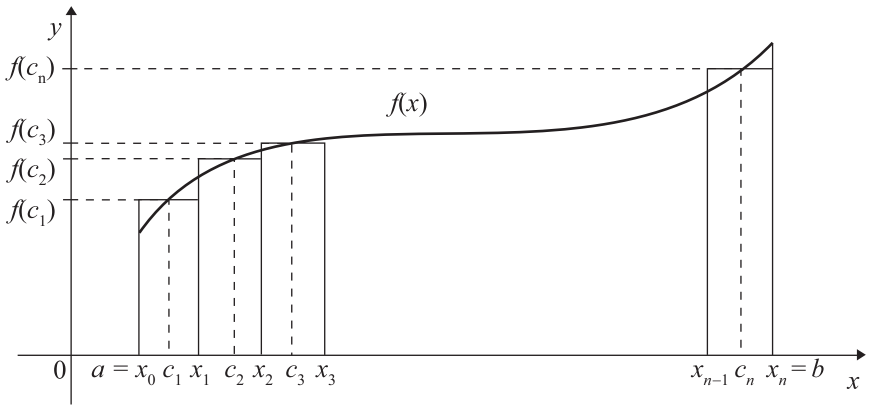

Figura 7.4

O comprimento do i – ésimo subintervalo, $\left[x_{i-1}\;,\;x_i\right]$, é dado por $\Delta\, x_i \;=\; x_i - x_{i-1}$. Vamos construir retângulos de base $x_i - x_{i-1}$ e altura $f(c_i)$ onde c_i é um ponto do intervalo $\left[x_{i-1}\;,\;x_i\right]$.

Da figura acima, temos

$\Delta x_1 = x_2 - x_1$ base do primeiro retângulo;

$\Delta x_2 = x_3 - x_2$ base do segundo retângulo;

... ;

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ base do i-ésimo retângulo; ... ;
$\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$ base do n-ésimo retângulo e
$f(c_1)$ altura do primeiro retângulo;
$f(c_2)$ altura do segundo retângulo; ... ;
$f(c_i)$ altura do i-ésimo retângulo; ...;
$f(c_n)$ altura do n-ésimo retângulo.

Logo, a área de cada retângulo será
$\Delta x_1 \times f(c_1)$ área do primeiro retângulo;
$\Delta x_2 \times f(c_2)$ área do segundo retângulo; ...;
$\Delta x_i \times f(c_i)$ área do i-ésimo retângulo; ... ;
$\Delta x_n \times f(c_n)$ área do n-ésimo retângulo.

Você já deve ter percebido que, aumentando o número de retângulos, pode-se obter uma melhor aproximação para a área A da região R.

Assim a soma das áreas dos n retângulos, denotada por S_n, será:

$$S_n = f(c_1) \times \Delta x_1 + f(c_2) \times \Delta x_2 + \ldots + f(c_n) \times \Delta x_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \times \Delta x_i$$

Essa soma é chamada *Soma de Riemann* da função f relativa à partição P. Quando n cresce, é "razoável" esperar que a soma das áreas dos retângulos aproxime da área A sob a curva. Deste modo, definimos a medida da área A da região R, como sendo

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \times \Delta x_i$$

se esse limite existir. E então se diz que a região R é mensurável.

A integral

A integral está associada ao limite apresentado acima. Nesta seção, daremos a definição da integral, que nasceu com a formulação dos problemas de áreas, e citaremos as suas propriedades. Já sabemos que a integral e a derivada, estudadas na Unidade 5, são as duas noções básicas em torno das quais se desenvolve todo o Cálculo. Conforme terminologia introduzida anteriormente, temos a seguinte definição.

Seja $f(x)$ *uma função limitada definida no intervalo fechado* $[a,b]$ *e seja* P *uma partição qualquer de* $[a,b]$. *A integral de* $f(x)$ *no intervalo* $[a,b]$, *denotada por* $\int_a^b f(x)\,dx$, *é dada por*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i ,$$

desde que o limite do segundo membro exista.

Destacando:

- *Na notação* $\int_a^b f(x)\,dx$, $f(x)$ *é chamada função integrando,* $\int$ *é o símbolo da integral, e os números* a *e* b *são chamados limites de integração, onde* a *é o limite inferior e* b *é o limite superior da integração.*

- *Se* $\int_a^b f(x)\,dx$ *existe, diz-se que* f *é integrável em* $[a,b]$ *e geometricamente, a integral representa a área da região limitada pela função* $f(x)$, *as retas* $x = a$ e $x = b$ *e o eixo* x, *desde que* $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,\ b]$.

Chamamos a sua atenção, para o fato de que a integral não significa necessariamente uma área. Dependendo do problema, ela pode representar grandezas, como: volume, quantidade de bactérias presentes em certo instante, trabalho realizado por uma força, momentos e centro de massa (ponto de equilíbrio).

A definição de integral pode ser ampliada, de modo a incluir o caso em que o limite inferior seja maior do o limite superior, e o caso em que os limites inferior e superior são iguais, senão vejamos, *Se $a > b$, então*

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx,$$

se a integral à direita existir.

Se $a = b$ e $f(a)$ existe, então

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Teorema *Se $f(x)$ é uma função contínua no intervalo fechado $[a,b]$, então $f(x)$ é integrável em $[a,b]$.*

A seguir, algumas propriedades fundamentais da integral definida, que usaremos no curso.

Propriedades da integral definida

As propriedades da integral definida não serão demonstradas, pois foge do objetivo do nosso curso.

P1. Se a função $f(x)$ é integrável no intervalo fechado $[a,b]$ e se k é uma constante real qualquer, então

$$\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

P2. Se as funções $f(x)$ e $g(x)$ são integráveis em $[a,b]$, então $f(x) \pm g(x)$ é integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

P3. Se $a < c < b$ e a função $f(x)$ é integrável em $[a,c]$ e em $[c,b]$, então, $f(x)$ é integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

P4. Se a função $f(x)$ é integrável e se $f(x) \geq 0$ para todo x em $[a,b]$, então,

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

P5. Se as funções $f(x)$ e $g(x)$ são integráveis em $[a,b]$ e $f(x) \geq g(x)$ para todo x em $[a,b]$, então,

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$$

P6. Se $f(x)$ é uma função integrável em $[a,\, b]$, então $|f(x)|$ é integrável em $[a,\, b]$ e

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Observação *Calcular uma integral através do limite das Somas de Riemann é, geralmente, uma tarefa árdua. Por isso nosso próximo objetivo é estabelecer o chamado Teorema Fundamental do Cálculo, o qual nos permite calcular muitas integrais de forma surpreendentemente fácil!*

GLOSSÁRIO

Teorema fundamental do cálculo*: estabelece a importante conexão entre o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral. O primeiro surgiu a partir do problema de se determinar a reta tangente a uma curva em um ponto, enquanto o segundo surgiu a partir do problema de se encontrar a área de uma figura plana.

Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)

Esta subseção contém um dos mais importantes teoremas do cálculo. Este teorema permite calcular a integral de uma função utilizando uma primitiva da mesma, e por isso, é a chave para calcular integrais. Ele diz que, conhecendo uma função primitiva de uma função $f(x)$ integrável no intervalo fechado $[a,b]$, podemos calcular a sua integral.

As considerações acima motivam o teorema a seguir.

Teorema Fundamental do Cálculo* - *se a função $f(x)$ é integrável no intervalo fechado $[a,b]$ e se $F(x)$ é uma função de $f(x)$ neste intervalo, então*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Costuma-se escrever $F(x)\Big|_a^b$ *para indicar* $F(b) - F(a)$.

Destacando:

O ***Teorema Fundamental do Cálculo*** *(TFC) não só torna o cálculo de integrais mais simples, como também contém em si a relação entre a derivada, o limite e a integral. Isto porque o Teorema Fundamental afirma que o valor da integral,* $\int_a^b f(x)\,dx$*, pode ser calculado com o auxílio de uma função* F*, tal que a derivada de* F *seja igual a* f*, possibilitando encontrar o valor de uma integral utilizando uma primitiva da função integrando.*

Vejamos agora, alguns exemplos aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo.

Exemplo 7.15 *Determinar*

$$\int_0^2 x\,dx.$$

Resolução: Sabemos que $F(x) = \frac{x^2}{2}$ é uma primitiva da função $f(x)$, pois,

$$F'(x) = 2 \times \frac{x}{2} = x = f(x).$$

Logo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, vem

$$\int_0^2 x\,dx = F(x)\Big|_0^2 = \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = F(2) - F(0)$$

$$= \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{4}{2} - \frac{0}{2} = 2 - 0 = 2.$$

Portanto,

$$\int_0^2 x\,dx = 2.$$

Exemplo 7.16 *Calcular:*

$$\int_1^3 \left(x^2+4\right)\,dx\,.$$

Resolução: Aqui, temos $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+4x$ que é uma primitiva de $f(x)=x^2+4$, pois

$$F'(x)=3\times\frac{x^2}{3}+4\times 1=x^2+4=f(x)\,.$$

Logo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, vem

$$\int_1^3\left(x^2+4\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+4x\right)\Bigg|_1^3=F(3)-F(1)$$

$$=\left(\frac{3^3}{3}+4\times 3\right)-\left(\frac{1^3}{3}+4\times 1\right)=\left(9+12\right)-\left(\frac{1}{3}+4\right)$$

$$=21-\left(\frac{1+12}{3}\right)=21-\frac{13}{3}=\frac{63-13}{3}=\frac{50}{3}\,.$$

Portanto,

$$\int_1^3\left(x^2+4\right)dx=\frac{50}{3}\,.$$

Observe que podemos calcular a integral $\int_1^3\left(x^2+4\right)dx$ usando as propriedades P1 e P2 da integral definida e o teorema fundamental do cálculo, o resultado será o mesmo. De fato,

$$\int_1^3\left(x^2+4\right)dx=\int_1^3 x^2dx+\int_1^3 4\,dx$$

$$=\int_1^3 x^2\,dx+4\int_1^3 dx=\frac{x^3}{3}\Bigg|_1^3+4\,x\Big|_1^3$$

$$=\left(\frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3}\right)+4\times\left(3-1\right)=\left(\frac{27}{3}-\frac{1}{3}\right)+4\times 2$$

$$=\frac{26}{3}+8=\frac{26+24}{3}=\frac{50}{3}\,.$$

Assim,

$$\int_1^3\left(x^2+4\right)dx=\frac{50}{3}\,.$$

Portanto, usando propriedades da integral definida e o TFC chegamos ao mesmo valor no cálculo da integral $\int_1^3 \left(x^2+4\right) dx$ que é $\frac{50}{3}$. Você pode usar sempre este fato.

Exemplo 7.17 *Calcular:*

$$\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx\,.$$

Resolução: Sabemos que $F(x)=\sqrt{x}$ é uma primitiva de $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, pois

$$F'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}=f(x)\,.$$

Logo pelo TFC, temos

$$\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = \sqrt{x}\Big|_1^4 = F(4)-F(1)$$

$$=\sqrt{4}-\sqrt{1}=2-1=1\,.$$

Portanto,

$$\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = 1\,.$$

Exemplo 7.18 *Calcular a integral* $\int_0^4 f(x)\, dx$ *, onde:*

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & se \;\; 0 \le x \le 2 \\ 2x, & se \;\; 2 < x \le 4 \end{cases}$$

Resolução: Pela propriedade P3 da integral definida, temos:

$$\int_0^4 f(x)\, dx = \int_0^2 f(x)\, dx + \int_2^4 f(x)\, dx\,.$$

Como $f(x)=x^2$ para $0 \le x \le 2$ e $f(x)=2x$ para $2 < x \le 4$, vem

$$\int_0^4 f(x)\, dx = \int_0^2 x^2\, dx + \int_2^4 2x\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 + 2 \times \frac{x^2}{2}\Big|_2^4$$

$$= \left(\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) + 2 \times \left(\frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{8}{3} - \frac{0}{3}\right) + 2 \times \left(\frac{16}{2} - \frac{4}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{8}{3} - 0\right) + 2\left(8 - 2\right)$$

$$= \frac{8}{3} + 12 = \frac{8+36}{3} = \frac{44}{3}.$$

Portanto,

$$\int_0^4 f(x)\, dx = \frac{44}{3}.$$

Exemplo 7.19 *O custo* $C(x)$ *para produzir a* $x-$*ésima TV digital, num programa de produção diária da fábrica* GL, *é dado por* $C(x) = \dfrac{50}{\sqrt{x}}$, $x \le 200$. *Determinar o custo para produzir as 100 primeiras TVs.*

Resolução: Vamos considerar C o valor exato do custo total de produção das 100 primeiras TVs, assim

$$C = C(1) + C(2) + \ldots + C(100).$$

Esta soma pode ser calculada aplicando o TFC, como segue:

$$C = \int_0^{100} C(x)dx = \int_0^{100} \frac{50}{\sqrt{x}}dx$$

$$= 50 \cdot \int_0^{100} \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 50 \cdot \int_0^{100} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}dx = 50 \cdot \int_0^{100} x^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$= 50 \cdot \left.\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right|_0^{100} = 50 \cdot 2 \cdot \left. x^{\frac{1}{2}}\right|_0^{100} = 100 \cdot \left(\sqrt{100} - \sqrt{0}\right) = 1000.$$

Portanto, o custo C para produzir as 100 primeiras TVs é de R\$1.000,00.

Exemplo 7.20 *A mineradora "Natureza Preservada", produz 400 toneladas por mês de certo minério. Estima-se que este processo dure 25 anos (300 meses) a partir de hoje, e que o preço por tonelada do minério da-*

qui a t meses, em reais, é dado pela função $f(t) = -0{,}03t^2 + 20t + 400$ *Determinar a receita gerada pela mineradora "Natureza Preservada", ao longo dos 300 meses.*

Resolução: Vamos considerar R a receita da mineradora ao longo dos 300 meses, assim

$$R = 400 \cdot f(1) + 400 \cdot f(2) + \ldots + 400 \cdot f(300).$$

Esta soma pode ser calculada aplicando o TFC, como segue

$$R = 400 \cdot \int_0^{300} f(t)dt = 400 \cdot \int_0^{300} \left(-0{,}03t^2 + 20t + 400\right)dt$$

$$= 400 \cdot \left[\left(-0{,}01t^3 + 10t^2 400t\right)\Big|_0^{300}\right]$$

$$= 400\left[\left(-0{,}01\left(300\right)^3 + 10\left(300\right)^2 + 400 \cdot 300\right)\right.$$

$$\left.-\left(-0{,}01\left(0\right)^3 + 10\left(0\right)^2 + 400 \cdot 0\right)\right]$$

$$= 400 \cdot \left(-270000 + 900000 + 120000\right)$$

$$= 400 \cdot 750000 = 300000000{,}00 \cdot$$

Portanto, a receita R, gerada pela mineradora "Natureza Preservada", ao longo dos 300 meses é R\$300.000.000,00.

Exemplo 7.21 *O administrador de uma empresa estima que a compra de um certo equipamento irá resultar em uma economia de custos operacionais. A economia dos custos operacionais dado pela função* $f(x)$ *unidades monetárias por ano, quando o equipamento estiver em uso por* x *anos, e* $f(x) = 4.000x + 1.000$ *para* $0 \le x \le 10$. *Determinar:*

a) a economia em custos operacionais para os cinco primeiros anos;

b) após quantos anos de uso o equipamento estará pago por si mesmo, se o preço de compra é R\$36.000,00.

Resolução: A economia obtida nos custos operacionais para os cincos primeiros anos é a integral definida de $f(x) = 4.000x + 1.000$

no intervalo $0 \le x \le 10$, logo, respondendo a letra a), vem

$$\int_0^5 (4.000x + 1.000)\,dx = \left(2.000x^2 + 1.000x\right)\Big|_0^5$$
$$= 2.000 \times (25) + 1000 \times 5$$
$$= 55.000.$$

Portanto, a economia nos custos operacionais para os 5 primeiros anos é de R$55.000,00.

Vamos agora responder a letra b). Como o preço de compra do equipamento é R$36.000,00, temos que o número de anos requeridos para o equipamento pagar-se por si mesmo é n que será a integral definida de $f(x) = 4.000x + 1.000$ de 0 até n, ou seja,

$$\int_0^n f(x)\,dx = 36.000\,.$$

Resolvendo a integral acima, vem

$$\int_0^n f(x)\,dx = 36.000 \Rightarrow \int_0^n (4.000x + 1.000)\,dx = 36.000$$
$$\Rightarrow \left(2.000x^2 + 1.000x\right)\Big|_0^n = 36.000$$
$$\Rightarrow 2.000n^2 + 1.000n = 36.000\,,$$
$$\Rightarrow 2n^2 + n - 36 = 0\,.$$

Resolvendo a equação $2n^2 + n - 36 = 0$ pela fórmula de Bhaskara , temos $n = 4$ e $n = -\dfrac{9}{2}$.

Portanto, são necessários 4 anos de uso para o equipamento pagar-se por si mesmo.

Chegou a hora de por em prática o que você aprendeu nesta seção. Resolva os exercicios e tire suas dúvidas com seu tutor. Só prossiga após resolver todos as questões pois tudo que veremos as seguir depende do ceonceito introduzido nesta seção.

Exercícios propostos – 2

1. Calcular a integral $\int_0^3 f(x)dx$ onde $f(x) = \begin{cases} 7-x, & se\ x<2 \\ x+3, & se\ x \geq 2 \end{cases}$.

2. Determinar o valor das seguintes integrais, aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo.

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x+\cos x\right)\, dx$.

b) $\int_0^1 \left(x^3 - 6x + 8\right)\, dx$.

c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\, dx$.

d) $\int_0^2 e^x\, dx$.

Integração por substituição

A partir de agora você vai conhecer uma técnica utilizada com o objetivo de desenvolver o cálculo de integrais indefinidas de funções que possuem primitivas. A esta técnica, damos o nome de integração por substituição ou mudança de variável.

Suponha que você tem uma função $g(x)$ e uma outra função f tal que $f\left(g(x)\right)$ esteja definida (f e g estão definidas em intervalos convenientes). Você quer calcular uma integral do tipo

$$\int f\left(g(x)\right) \times g'(x)\, dx,$$

Logo,

$$\int f\left(g(x)\right) \times g'(x)\, dx = F\left(g(x)\right) + C. \qquad (1)$$

Fazendo $u = g(x) \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = g'(x) \Rightarrow du = g'(x)\ dx$ e substituindo na equação (1), vem

$$\int f\left(g(x)\right) \times g`(x)\, dx = \int f(u)\, du = F(u) + C.$$

Vejamos agora alguns exemplos de como determinar a integral indefinida de uma função, aplicando a técnica da mudança de variável ou substituição e usando a tabela acima.

Exemplo 7.22 *Calcular a integral*

$$\int \left(x^2+5\right)^3 \times 2\,x\;dx\,.$$

Resolução: Fazendo a substituição de x^2+5 por u na integral dada, ou seja, $u = x^2+5$, vem

$$u = x^2+5 \;\Rightarrow\; \frac{du}{dx} = 2\,x+0 = 2\,x \;\Rightarrow du = 2\,x\;dx\,.$$

Agora, vamos em $\int \left(x^2+5\right)^3 \times 2\,x\;dx$, substituímos x^2+5 por u e $2\,x\;dx$ por du e temos:

$$\int \left(x^2+5\right)^3 \times 2\,x\;dx = \int u^3\,du = \frac{u^4}{4}+C\,,$$

onde utilizamos a fórmula (ii) da tabela de integrais.

Como,

$$u = x^2+5 \;\Rightarrow\; \frac{u^4}{4}+C = \frac{\left(x^2+5\right)^4}{4} + C\,.$$

Portanto,

$$\int \left(x^2+5\right)^3 .\,2\,x\;dx = \frac{\left(x^2+5\right)^4}{4} + C\,.$$

Exemplo 7.23 *Calcular:*

$$\int \frac{3\,x^2\,dx}{1+x^3}\,.$$

Resolução: Fazendo a substituição de $1+x^3$ por u na integral dada, ou $u = 1+x^3$, vem:

$$u = 1+x^3 \;\Rightarrow\; \frac{du}{dx} = 0+3\,x^2 = 3\,x^2 \;\Rightarrow du = 3\,x^2\,dx\,.$$

Agora, vamos em $\int \frac{3\,x^2\,dx}{1+x^3}$, substituímos $u = 1+x^3$ por u e

$3\,x^2\ dx$ por du e temos:

$$\int \frac{3\,x^2\ dx}{1+x^3} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C\,.$$

(Pela fórmula (iii) da tabela de integrais).

Como

$$u = 1 + x^3 \quad \Rightarrow \quad \ln|u| + C = \ln\left|1 + x^3\right| + C\,.$$

Portanto,

$$\int \frac{3\,x^2\ dx}{1+x^3} = \ln\left|1 + x^3\right| + C\,.$$

Exemplo 7.24 *Calcular:*

$$\int \frac{dx}{16+9x^2}\,.$$

Resolução. Na integral dada temos

$$\int \frac{dx}{16+9x^2} = \int \frac{dx}{4^2+3^2x^2} = \int \frac{dx}{4^2+(3x)^2}$$

aqui $a = 4$ e $u = 3x$.

Assim,

$$u = 3x \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = 3 \quad \Rightarrow \quad du = 3dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{3}\,du\,.$$

Agora, vamos à integral dada $\int \frac{dx}{16+9x^2}$, substituímos $3x$ por u e dx por $\frac{1}{3}\,du$ e temos

$$\int \frac{dx}{16+9x^2} = \int \frac{dx}{4^2+(3x)^2}$$

$$= \int \frac{\frac{1}{3}\,du}{4^2+u^2} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{4^2+u^2}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}\ arc\ \mathrm{tg}\frac{u}{4} + C$$

$$= \frac{1}{12}\ arc\ tg\ \frac{u}{4}\ +\ C\,.$$

(Pela fórmula (xvi) da tabela de integrais).

Como:

$$u = 3x \Rightarrow \frac{1}{12} arctg \frac{u}{4} + C = \frac{1}{12} arctg \frac{3x}{4} + C .$$

Portanto,

$$\int \frac{dx}{16 + 9x^2} = \frac{1}{12} arctg \frac{3x}{4} + C .$$

Exercícios propostos – 3

- Calcular as seguintes integrais abaixo:

1) $\int \frac{4}{(7-5x)^3} dx$. 2) $\int \frac{1}{x^2} dx$.

3) $\int \cos(7t - \pi)\, dt$. 4) $\int \sqrt{x^2 - 2x^4}\, dx$.

5) $\int \frac{dx}{x^2 + 3}$. 6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \;\text{sen}\, x\, dx$.

7) $\int_1^4 \frac{\ln t^5}{t} dt$. 8) $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$.

Integração por partes

Na seção anterior, estudamos como calcular integrais usando o método da substituição. Mas, existem algumas integrais, tais como: $\int \ln x\, dx$, $\int x e^x dx$, $\int x^3 \cos x\, dx$, etc., que não podem ser resolvidas aplicando o método da substituição. Necessitamos de alguns conhecimentos a mais. Neste caso, iniciaremos apresentando a técnica de *integração por partes*.

Sejam $u(x)$ e $v(x)$ funções diferenciáveis num intervalo (a,b).

Então, podemos escrever:

$$(uv)' = uv' + vu',$$

ou seja,

$$vu' = (uv)' - uv'.$$

Integrando os dois membros da igualdade acima, temos:

$$\int_a^b vu'dv = \int_a^b (uv)'dx - \int_a^b uv'dx,$$

ou,

$$\int_a^b vdu = uv\Big|_a^b - \int_a^b udv.$$

E para a integral indefinida tem-se

$$\int_a^b vdu = uv\Big|_a^b - \int_a^b udv,$$

ou simplesmente,

$$\int vdu = uv - \int udv. \qquad (2)$$

A expressão (2) é conhecida como a fórmula de *integração por partes*. Quando aplicarmos esta fórmula para resolver a integral $\int f(x)dx$, devemos separar o integrando dado em duas partes, uma sendo u e a outra, juntamente com dx, sendo dv. Por essa razão o cálculo de integral utilizando a fórmula (2) é chamado *integração por partes*. Para escolher u e dv, devemos lembrar que:

(i) a parte escolhida como dv, deve ser facilmente integrável;
(ii) $\int v\,du$ deve ser mais simples que $\int u\,dv$.

A seguir, apresentaremos alguns exemplos:

Exemplo 7.25 *Calcular a integral:*

$$\int x e^x dx.$$

Resolução: Sejam $u = x$ e $dv = e^x dx$. Assim, teremos $du = dx$ e $v = e^x$. Aplicando a fórmula $\int u\,dv = uv - \int v\,du$, obtemos

$$\begin{aligned}\int x e^x dx &= x e^x - \int e^x dx \\ &= x e^x - e^x + C.\end{aligned}$$

Exemplo 7.26 *Calcular a integral:*

$$\int \ln x\, dx.$$

Resolução: Sejam $u = \ln x$ e $dv = dx$. Assim, teremos $du = \frac{1}{x}dx$ e $v = x$. Aplicando a fórmula (2), obtemos:

$$\int \ln x\, dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx$$
$$= x\ln x - x + c.$$

Exemplo 7.27 *Encontre:*

$$\int arc\,\mathrm{tg}\, x\, dx.$$

Resolução: Sejam $u = arc\,\mathrm{tg}\, x$ e $dv = dx$. Assim, teremos, $du = \frac{dx}{1+x^2}$ e $v = x$. Logo,

$$\int arc\,\mathrm{tg}\, x\, dx = x\, arc\,\mathrm{tg}\, x - \int \frac{x}{1+x^2}dx\,.$$

Para calcular a integral $\int \frac{x}{1+x^2}dx$, utilizamos a substituição $t = 1 + x^2 \Rightarrow dt = 2x\,dx$, então,

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C$$
$$= \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c\text{, pois } 1+x^2 \text{ é sempre positivo.}$$

Portanto,

$$\int arc\,\mathrm{tg}\, x\, dx = x\, arc\,\mathrm{tg}\, x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Exemplo 7.28 *Calcular:*

$$\int x\ln x\, dx.$$

Resolução: Sejam $u = \ln x$ e $dv = x\,dx$. Assim, teremos $du = \frac{1}{x}dx$ e $v = \frac{1}{2}x^2$. Logo,

$$\int x\ln x\, dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x\, dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.$$

Exemplo 7.29 *Calcular:*

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx.$$

Resolução: Sejam $u = e^x$ e $dv = \operatorname{sen} x \, dx$. Assim, teremos $du = e^x dx$ e $v = -\cos x$. Logo,

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx. \qquad (3)$$

Novamente, considerando, $\bar{u} = e^x$ e $d\bar{v} = \cos x \, dx$, temos $d\bar{u} = e^x dx$ e $\bar{v} = \operatorname{sen} x$. De (2), obtemos:

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx. \qquad (4)$$

De (3) e (4), segue que:

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) + C.$$

Exemplo 7.30 *Determine:*

$$\int \sec^3 x \, dx.$$

Resolução: Podemos escrever:

$$\int \sec^3 x \, dx = \int \sec^2 x \sec x \, dx.$$

Fazendo $u = \sec x$, temos $du = \sec x \operatorname{tg} x \, dx$ e $dv = \sec^2 x \, dx$ e $v = \operatorname{tg} x$. Aplicando a fórmula (2), obtemos:

$$\begin{aligned}
\int \sec^3 x \, dx &= \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec x \operatorname{tg}^2 x \, dx \\
&= \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) \, dx \\
&= \sec x \operatorname{tg} x - \int (\sec^3 x - \sec x) \, dx \\
&= \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec^3 x \, dx + \int \sec x \, dx.
\end{aligned}$$

Simplificando, obtemos:

$$2 \int \sec^3 x \, dx = \sec x \operatorname{tg} x + \int \sec x \, dx.$$

Pela tabela de integração sabemos que

$$\int \sec x \, dx = \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C.$$

Logo,

$$\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\sec x\,\mathrm{tg}\,x + \frac{1}{2}\ln\left|\sec x + \mathrm{tg}\,x\right| + C.$$

Exercícios propostos – 4

- Calcular as seguintes integrais usando o método de integração por partes:

1) $\int e^x (x+1)^2\,dx$.

2) $\int x^2 \ln x\,dx$.

3) $\int \sqrt{x}\ln x\,dx$.

4) $\int \mathrm{sen}^2 x\,dx$.

5) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$.

6) $\int x\,e^{-x}dx$.

Integrais impróprias

Sabemos que toda função contínua num intervalo fechado é integrável nesse intervalo, ou seja, se f é uma função contínua em $[a,b]$ então existe $\int_a^b f(x)dx$. Quando f não está definida num dos extremos do intervalo $[a,b]$, digamos em a, mas existe $\int_t^b f(x)dx$ para todo $t \in (a,b)$, podemos definir $\int_a^b f(x)dx$ como sendo o limite $\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx$ quando este limite existe. Para os outros casos a situação é análoga. Nestes casos as integrais são conhecidas como *integrais impróprias*. A seguir apresentaremos a definição e o procedimento para calcular integrais impróprias. Analisaremos cada caso em separado.

(i) Dado $f:(a,b]\to\mathbb{R}$, se existe $\int_t^b f(x)dx$ para todo $t\in(a,b)$, definimos:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx\,, \quad a < t < b\,,$$

quando este limite existe. Caso não exista este limite diremos que a integral $\int_a^b f(x)dx$ não existe, ou não converge.

Graficamente,

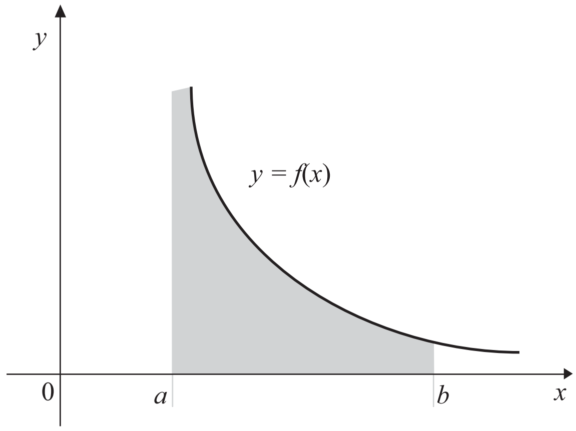

Figura 7.5

(ii) Dado $f : [a,b) \to \mathbb{R}$, se existe $\int_a^t f(x)dx$ para todo $t \in (a,b)$, definimos:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx\,, \quad a < t < b\,,$$

quando este limite existe. Caso não exista este limite diremos que $\int_a^b f(x)dx$ não existe, ou não converge.

Graficamente,

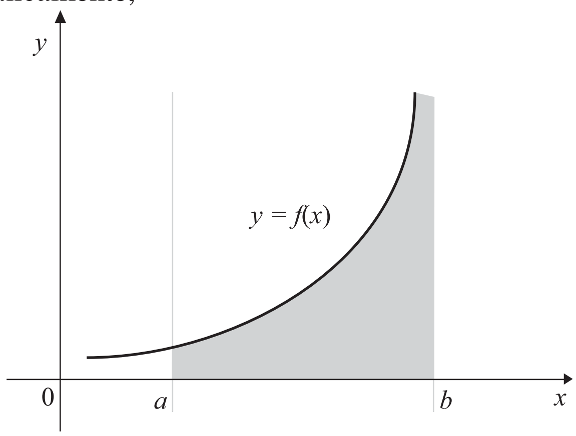

Figura 7.6

(iii) Dado $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, escrevemos:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\,, \quad a<c<b\,,$$

quando as duas integrais do 2º membro existem.

As integrais do segundo membro foram definidas em (i) e (ii), respectivamente.

(iv) Quando $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é descontínua em algum $c\in(a,b)$ e não existe algum limite lateral perto de c, então escrevemos

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\,, \quad a<c<b\,,$$

sempre que as integrais do 2º membro existem.

As integrais do segundo membro foram definidas em (ii) e (i) respectivamente.

(v) Dada $f:(-\infty,b]\to\mathbb{R}$, se existir $\int_t^b f(x)dx$ para todo $t\in(-\infty,b)$, definimos:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx\,, \quad -\infty<t<b\,,$$

quando este limite existe. Se este limite não existir, diremos que a integral $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ não existe ou não converge.

(vi) Dada $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$, se existir $\int_a^t f(x)dx$ para todo $t\in[a,\infty)$, definimos

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx\,, \quad a<t<\infty\,,$$

quando este limite existe. Se este limite não existir diremos que a integral $\int_a^\infty f(x)dx$ não existe ou não converge.

(vii) Dada $f:(-\infty,\infty)\to\mathbb{R}$, escrevemos,

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx\,, \quad -\infty<c<\infty\,,$$

quando as duas integrais do 2º membro existem.

As integrais do segundo membro foram definidas em (v) e (vi) respectivamente.

Quando uma integral imprópria existe, ou seja, o limite envolvido tem valor finito, dizemos que ela é *convergente*. Caso contrário dizemos que ela é *divergente*.

A seguir apresentaremos alguns exemplos.

Exemplo 7.31 *Calcular, se existir:*

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}.$$

Resolução: Observemos que a função $f(x) = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x}}$ não está definida no ponto $x = 1$. Neste caso calculamos o limite, usando (ii)

$$\lim_{t \to 1^-} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t \to 1^-} \int_0^t (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx$$

Fazendo $u = 1 - x \Rightarrow du = -dx$, pelo método de substituição, vem

$$\int (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx = -\int u^{-\frac{1}{2}} du = -2u^{1/2},$$

ou seja,

$$\int_0^t (1-x)^{-1/2} dx = -2(1-x)^{1/2}\Big|_0^t$$

$$= -2\left[(1-t)^{1/2} - 1\right].$$

Logo,

$$\lim_{t \to 1^-} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{t \to 1^-} -2\left[(1-t)^{1/2} - 1\right]$$

$$= -2[0-1] = 2$$

Portanto, a integral converge e temos

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2.$$

Exemplo 7.32 *Calcular, se existir:*

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2}.$$

Resolução: Observemos que a função $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ não está definida no ponto $x=0$. Neste caso, calculamos o limite, usando (i)

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{dx}{x^2} &= \lim_{t\to 0^+}\left.\frac{x^{-1}}{-1}\right|_t^1\\ &= \lim_{t\to 0^+}\left(-1+\frac{1}{t}\right)\\ &= \infty\,.\end{aligned}$$

Portanto, a integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ diverge ou não existe.

Exemplo 7.33 *Calcular, se existir:*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}\,dx.$$

Resolução: Observemos que $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}$ não está definida em $x=\dfrac{\pi}{2}$. Assim, calculamos o limite, usando (i)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\int_0^t \frac{\cos x}{\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}\,dx &= \lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\operatorname{sen} x\right)^{-1/2}\cos x\,dx\\ &= \lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\left[-\left.\frac{\left(1-\operatorname{sen} x\right)^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right|_0^t\right]\\ &= \lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\left[\left.-2\left(1-\operatorname{sen} x\right)^{1/2}\right|_0^t\right]\\ &= \lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\left[-2\left(1-\operatorname{sen} t\right)^{1/2}+2\left(1-\operatorname{sen} 0\right)^{1/2}\right]\\ &= \left[-2\left(1-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}+2\right]\\ &= \left[-2(1-1)^{1/2}+2\right]=2\end{aligned}$$

Logo, a integral converge e temos

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}\,dx = 2\,.$$

Exemplo 7.34 *Determinar, se existir:*

$$\int_0^4 \frac{dx}{x-2}.$$

Resolução: Observemos que $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ não é contínua em $x = 2$. Assim,

$$\int_0^4 \frac{dx}{x-2} = \int_0^2 \frac{dx}{x-2} + \int_2^4 \frac{dx}{x-2},$$

se as integrais do segundo membro convergirem.

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 2^-}\int_0^t \frac{dx}{x-2} + \lim_{t\to 2^+}\int_t^4 \frac{dx}{x-2}\\
&= \lim_{t\to 2^-} \ln|x-2|\Big|_0^t + \lim_{t\to 2^+} \ln|x-2|\Big|_t^4\\
&= \lim_{t\to 2^-}\left(\ln|t-2| - \ln|-2|\right) + \lim_{t\to 2^+}\left(\ln|2| - \ln|t-2|\right).
\end{aligned}$$

Observamos que calculando o primeiro limite obtemos o resultado ∞, logo, podemos concluir que a integral proposta não existe, ou seja, a integral é divergente.

Exemplo 7.35 *Determinar, se existir:*

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx.$$

Resolução: Calculamos

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to-\infty}\int_t^0 e^x dx &= \lim_{t\to-\infty} e^x\Big|_t^0 \quad (-\infty < t < 0)\\
&= \lim_{t\to-\infty}\left(1 - e^t\right)\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Logo, a integral converge e temos

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx = 1.$$

Exemplo 7.36 *Determinar, se existir:*

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Resolução: Calculamos

$$\lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to\infty} \left.\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right|_1^t = \lim_{t\to\infty} \left.\frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right|_1^t \qquad (1 < t < \infty)$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(2\sqrt{t}-2\right) = \infty .$$

Portanto, a integral diverge.

Exemplo 7.37 *Calcular, se existir:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} .$$

Resolução. Escrevemos,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} ,$$

e calculamos os limites:

$$\lim_{t\to-\infty}\int_t^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \left. arc\ \mathrm{tg}\ x\right|_t^0 + \lim_{t\to\infty} \left. arc\ \mathrm{tg}\ x\right|_0^t$$

$$= -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Portanto, a integral converge e temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi .$$

Exercícios propostos – 5

- Calcular, se existirem, as seguintes integrais impróprias, indicar se converge ou diverge.

1) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx$. 2) $\int_0^1 x \ln x \, dx$.

3) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$. 4) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4dx}{x^2+16}$. 5) $\int_{-1}^{1} \frac{dy}{y^2}$.

Saiba Mais...

Para aprofundar os conteúdos abordados neste capítulo consulte:

- FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A**: Funções, Limite, Derivação, Integração, 5ª ed. São Paulo: Makron Books, 1992.
- MORETTIN, Pedro A.; HAZZAN, Samuel; BUSSAB, Wilton de O. **Cálculo funções de uma e várias variáveis**. São Paulo: Saraiva, 2005.
- SILVA, Sebastião Medeiros da; SILVA, Elio Medeiros da; SILVA, Ermes Medeiros da. **Matemática**: para os cursos de economia, administração e ciências contábeis. 3. ed. São Paulo: Atlas, 1988.

- http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/supeior/superior.htm
- http://www.cepa.if.usp.br/e-calculo

RESUMO

Nesta Unidade tratamos o conceito de função primitiva, e com isso compreendeu também a definição de integral indefinida e suas propriedades. Aprendeu a calcular o valor de algumas integrais imediatas, bem como a calcular uma integral definida aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo. Você também aprendeu algumas técnicas de cálculo de integrais e de integrais impróprias.

RESPOSTAS

- **Exercícios propostos – 1**

1) a) $F(x) = \frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 + 2x + K$.

b) $F(x) = -4x^{-\frac{1}{4}} + K$.

c) $F(x) = -2x^{-\frac{1}{2}} + K$.

d) $F(x) = \ln(x-1) + K$.

e) $F(x) = \frac{e^{4x}}{4} + K$.

2) a) $F(x) = -2\cos x + \operatorname{sen} x - \frac{x^3}{6} + K$ e $K = \frac{\pi^3}{384}$.

b) $F(x) = 3x^{\frac{1}{3}} + \frac{x^2}{2} + K$ e $K = -3$.

c) $F(x) = \sec x + \operatorname{sen} x + K$ e $K = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

d) $F(x) = \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} + e^x + K$ e $K = 1$.

e) $F(x) = \operatorname{sen} x + \cos x + K$ e $K = -1$.

3) a) $\frac{x^5}{5} - \frac{8}{3}x^3 + 16x + C$.

b) $\ln x + 6x^{\frac{1}{3}} + C$.

c) $\frac{x^4}{4} - \frac{4}{3x^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{x} + C$.

d) $4x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C$.

e) $-\frac{1}{2x^2} + C$.

- **Exercícios propostos – 2**

1) $\frac{33}{2}$.

2) a) $\frac{\pi^2}{8}+1$; b) $\frac{21}{4}$; c) 1; d) e^2-1.

- **Exercícios propostos – 3**

1) $\frac{1}{5(7-5x)^2}+C$.

2) $\frac{-1}{x} + C$.

3) $\frac{1}{7}\,\text{sen}(7t-\pi)+C$.

4) $\frac{-1}{6}\left(1-2x^2\right)^{\frac{3}{2}}+C$.

5) $\frac{\sqrt{3}}{3}\,arctg\,\frac{x}{\sqrt{3}}+C$.

6) $\frac{1}{4}$.

7) $\frac{5}{2}\times(\ln 4)^2$.

8) $\sqrt{10}-1$.

- **Exercícios propostos – 4**

1) $e^x x^2+e^x+C$.

2) $\frac{1}{3}x^3\ln|x|-\frac{x^3}{9}+C$.

3) $\frac{2}{3}x^{3/2}\ln|x|-\frac{4x^{3/2}}{9}+C$.

4) $-\frac{1}{2}\cos x\,\text{sen}\,x+\frac{x}{2}+C$.

5) $\frac{1}{2}(\ln|x|)^2+C$.

6) $-xe^{-x}-e^{-x}+C$.

Exercícios propostos – 5

1) 2. 2) $-\frac{1}{4}$. 3) $\frac{\pi}{2}$. 4) π. 5) ∞.