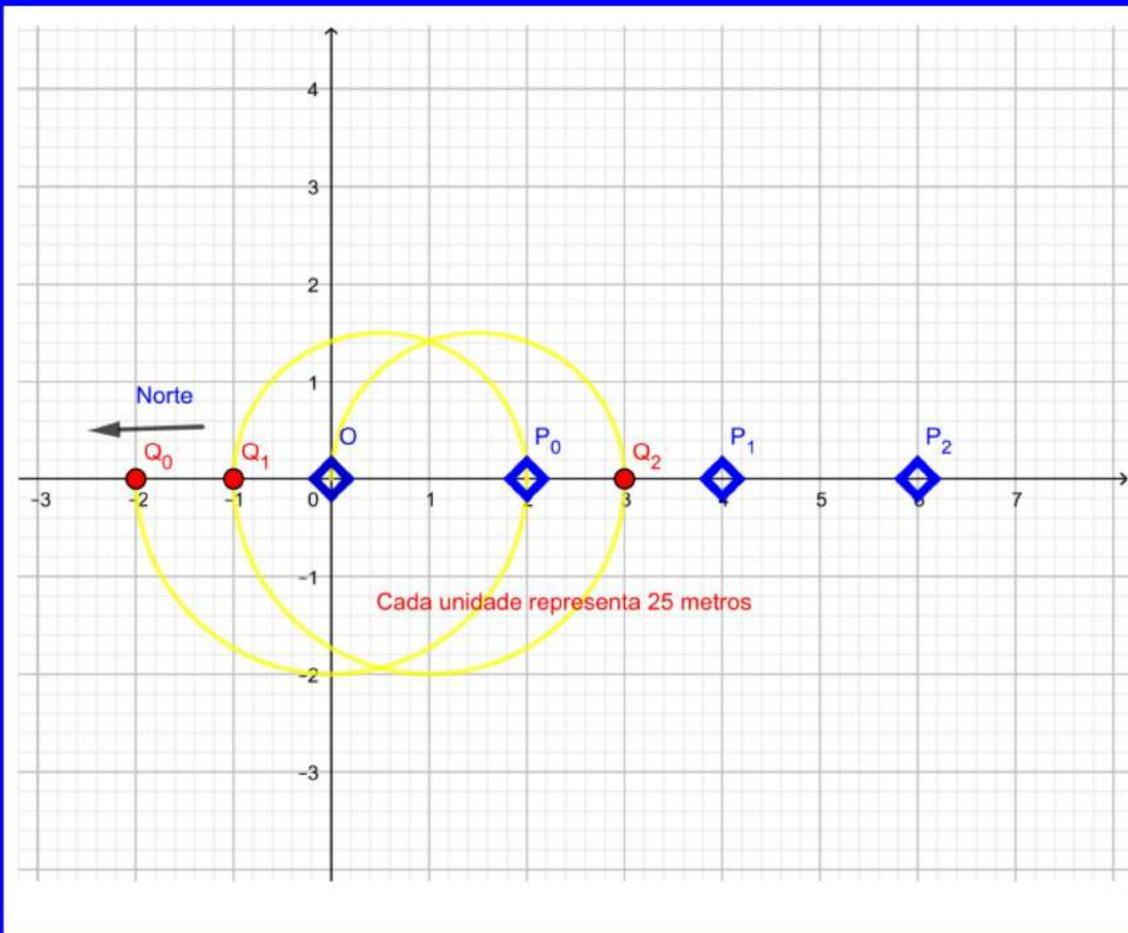


# PRAGMATISMO MATEMÁTICO: *matrizes*



**Gerson Bruno Pinto de Aguiar**  
**Cleidinaldo Aguiar Souza**



**Gerson Bruno Pinto de Aguiar**  
**Cleidinaldo Aguiar Souza**

**PRAGMATISMO**  
**MATEMÁTICO:**  
*matrizes*



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ



**Reitor**

*Gildásio Guedes Fernandes*

**Vice-Reitor**

*Viriato Campelo*

**Superintendente de Comunicação Social**

*Samantha Viana Castelo Branco Rocha Carvalho*

**Diretor da EDUFPI**

*Cleber de Deus Pereira da Silva*

**EDUFPI - Conselho Editorial**

*Cleber de Deus Pereira da Silva (presidente)*

*Cleber Ranieri Ribas de Almeida*

*Gustavo Fortes Said*

*Nelson Juliano Cardoso Matos*

*Nelson Nery Costa*

*Viriato Campelo*

*Wilson Seraine da Silva Filho*

**Projeto Gráfico. Capa. Diagramação.**

*Cleidinaldo Aguiar Souza*

**Revisão**

*Gerson Bruno Pinto de Aguiar*

*Cleidinaldo Aguiar Souza*

FICHA CATALOGRÁFICA  
Universidade Federal do Piauí  
Biblioteca Comunitária Jornalista Carlos Castello Branco  
Divisão de Representação da Informação

A283p Aguiar, Gerson Bruno Pinto de .  
Pragmatismo matemático : matrizes / Gerson Bruno Pinto de  
Aguiar, Cleidinaldo Aguiar Souza. -- Teresina : EDUFPI, 2022.  
188 p.

ISBN 978-65-5904-202-9

1. Matrizes. 2. Circunferência. 3. Sólidos. 4. Robótica.  
5. Impressora 3D. I. Souza, Cleidinaldo Aguiar. II. Título.

CDD 512.943

Bibliotecária: Francisca das Chagas Dias Leite - CRB3/1004



Editora da Universidade Federal do Piauí – EDUFPI  
Campus Universitário Ministro Petrônio Portella  
CEP: 64049-550 - Bairro Ininga - Teresina - PI – Brasil



As invenções são, sobretudo, o resultado  
de um trabalho de teimoso.

**Santos Dumont.**

## **Dedicação.**

Para todos que contribuíram, contribuem  
e contribuirão com o PROFMAT-UFPI.

# Sumário

<b>1</b>	Prefácio	1
<b>2</b>	O Plano Cartesiano	4
<b>3</b>	Circunferência	6
<b>4</b>	Matrizes	12
4.1	Operações com Matrizes .....	17
<b>5</b>	Determinante	39
<b>6</b>	Uma Nova Maneira de Escrever Uma Circunferência	48
6.1	A Circunferência Escrita Como um Produto de Matrizes .....	49
6.2	A Circunferência Escrita Como Produto e Soma de Matrizes .....	62

6.2.1 Escrevendo A Circunferência Através de Matrizes - Conhecendo o Seu Centro e um Ponto da Circunferência Centrada na Origem. 65

6.2.2 Escrevendo a Circunferência Através de Matrizes- Conhecendo o Centro e um de Seus Pontos ..... 80

## **7** Sólidos Escritos Através de Operações com Matrizes 84

---

7.1 Esferas Escritas Através de Operações Com Matrizes ..... 86

7.2 Cilindros Escritos através de operações com matrizes ..... 108

7.3 Cones Escritos Através de Operações com Matrizes ..... 113

## **8** Pragmatismo 117

---

8.1 Planejando a Rota de Um Veículo Autônomo ..... 118

8.2 Uma Volta ao Mundo ..... 157

8.3 Mapeando Uma Peça Cilíndrica ..... 167

8.4 O Scanner 3D ..... 176

# 1. Prefácio

Este livro é resultado de pesquisas desenvolvidas no Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Piauí (PROFMAT-UFPI). Estas pesquisas foram desenvolvidas entre os anos de 2018 à 2022, pelos pesquisadores: Gerson Bruno Pinto de Aguiar, Marina França Oliveira e Cleidinaldo Aguiar Souza.

Estas pesquisas surgiram como tentativa bem sucedida de resolver um problema recorrente na educação básica, que consiste em encontrar uma ligação, entre os diversos conteúdos que são ensinados em sala de aula e a vida prática. Por vezes estas ligações acabam não sendo trabalhadas, pois foca-se apenas na teoria.

Como consequência, atualmente as escolas procuram cada vez mais professores que para além do domínio do conteúdo exigido em sala de aula, consigam fazer uma bela ligação entre estes conteúdos, através das diversas áreas do conhecimento. Muitas destas exigências são atendidas através de projetos realizados dentro das escolas.

Pensando na interdisciplinaridade, este livro tem por objetivo central conectar o ensino de matemática a problemas atuais ligados a outras áreas. Mais precisamente o ensino de álgebra e geometria para resolver problemas clássicos no campo da robótica, planejamento de rotas de voo e problemas ligados a escaneamento 3D.

Em robótica, um problema clássico consiste em guiar um robô autônomo de uma determinada configuração inicial até uma dada configuração final, na presença de obstáculos. Uma das alternativas para resolver este tipo de problema, é encontrar uma trajetória por onde o robô irá se deslocar.

Encontrar trajetórias em geral não é tarefa fácil, porém para estudantes que já possuem uma boa maturidade com a disciplina de Cálculo Avançado, o entendimento do comportamento da trajetória é facilitado. Entretanto, para estudantes da educação básica, esta tarefa pode ser bastante complicada,

devido a falta de ferramentas que são necessárias.

Neste livro, a técnica adotada será a seguinte: utilizaremos matrizes para encontrar trajetórias para o deslocamento de um robô autônomo. Mais precisamente, mostraremos que uma circunferência de centro qualquer e raio  $r > 0$ , é dada através de operações com matrizes. Desta forma, obteremos uma nova maneira de escrever uma circunferência.

Em [6] Oliveira, mostrou que uma circunferência com centro na origem é obtida através do produto de matrizes ortogonais por um ponto fixo pertencente a circunferência. No ano de 2020, em [7] Oliveira e Souza descreveram através do produto de matrizes a trajetória de um robô autônomo, descrita por uma circunferência centrada na origem.

Para as aplicações que estão relacionadas com a trajetória de voo e o funcionamento de um scanner 3d, generalizaremos a noção que tínhamos anteriormente, onde escrevemos figuras planas através de operações com matrizes e passaremos a escrever as figuras que estão no espaço através de operações com matrizes. Desta forma, conseguimos escrever sólidos geométricos através de operações com matrizes, e sem utilizar a noção de espaço tridimensional Euclidiano, no sentido literal. Encontraremos as equações que descrevem as superfícies que envolve estes sólidos.

Aos leitores familiarizados com o espaço Euclidiano tridimensional, a noção que apresentaremos aqui fica clara, permitindo uma visão um pouco mais apurada do que está acontecendo. Aos que não dominam estes espaços, é um convite interessante uma boa leitura deste livro.

Generalizaremos os trabalhos [6] e [7] de Oliveira e Souza, assim como os trabalhos [2] e [3] dos autores, de Aguiar e Souza. Assim, este livro está dividido da seguinte maneira: o capítulo 2, é dedicada ao estudo do plano cartesiano, onde apresentaremos este espaço, que será o ambiente matemático que inicialmente trabalharemos. No capítulo 3, faremos uma breve introdução da circunferência dada de forma usual, que será a figura geométrica sobre o plano que iremos reescrever. No capítulo 4 dedicaremos uma boa atenção para as matrizes e suas propriedades, pois é através das matrizes e suas operações que reescreveremos a circunferência e algumas figuras espaciais. No capítulo 5 faremos uma apresentação do determinantes e suas propriedades, pois através do determinante de uma matriz podemos escrever uma mesma circunferência de duas maneiras diferentes. Estes quatro capítulos iniciais podemos ser encontrados facilmente na literatura atual. Agora no capítulo 6, apresentaremos os resultados que permitem escrever uma circunferência através de operações com matrizes, surgindo aos leitores em um

---

primeira leitura, não se atentarem tanto as demonstrações, deixando isto para uma leitura mais madura. No capítulo 7, generalizaremos o que foi feito no capítulo 6 e escreveremos a superfície que envolve um sólido através de operações com matrizes, é claro que as matrizes que utilizaremos nesta generalização são matrizes de ordem 3 .

A parte final deste livro, chama-se pragmatismo, mantendo coerência com o título do livro. Neste capítulo, faremos aplicações dos resultados apresentados nos capítulos anteriores, apresentaremos a noção de deslocamento e trajetória utilizando operações com matrizes; generalizaremos a noção de deslocamento/ trajetória através de operações com matrizes; ainda utilizando operações com matrizes faremos uma volta ao mundo; introduziremos a definição de mapeamento de sólidos cilíndricos; finalizando o livro com a identificação de sólidos para o processo de escaneamento 3D.

Recomendamos este livro para estudantes da educação básica; professores da educação básica e superior; estudantes de graduação em matemática, física, computação, engenharias e áreas afins; para os amantes de matemática e para os leitores em geral.

## 2. O Plano Cartesiano

Iniciamos introduzindo de maneira breve a noção de plano através de um sistema de eixos ortogonais. O plano será a base para construção do restante do livro. Para mais detalhes sobre o plano, com um sistema de eixos ortogonais consulte a referência [1].

Os números  $x, y \in \mathbb{R}$  do par ordenado  $(x, y)$  associado ao ponto  $P$  são chamados **coordenadas cartesianas** do ponto  $P$ :  $x$  é a **primeira coordenada** ou **abscissa** de  $P$  e  $y$  é a **segunda coordenada** ou **ordenada** de  $P$ , como ilustra a Figura 2.1.

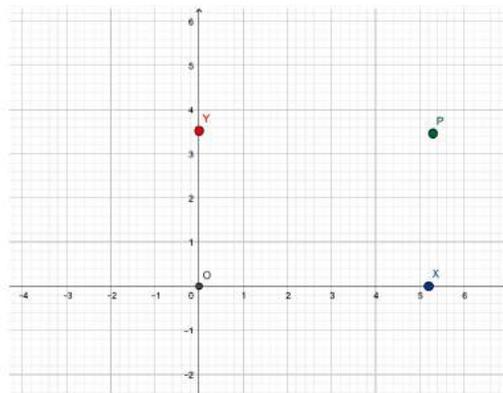


Figura 2.1: Plano Cartesiano .

O complementar dos eixos no plano é a união de quatro regiões denominadas **quadrantes** e enumerados, como ilustra a Figura 2.2.

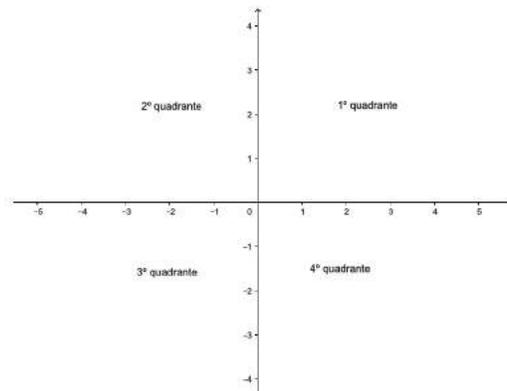


Figura 2.2: Um plano dividido em quadrantes .

Note que os pontos do eixo  $OX$  têm coordenadas  $(x, 0)$ , os pontos do eixo  $OY$  têm coordenadas  $(0, y)$  e os quadrantes, dados em coordenadas, são:

$$1^{\circ} \text{ quadrante} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ e } y > 0\};$$

$$2^{\circ} \text{ quadrante} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0 \text{ e } y > 0\};$$

$$3^{\circ} \text{ quadrante} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0 \text{ e } y < 0\};$$

$$4^{\circ} \text{ quadrante} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ e } y < 0\};$$

Assim, a numeração dos quadrantes é feita no sentido anti-horário, a contar do quadrante correspondente aos pontos que possuem ambas as coordenadas positivas, como ilustra a Figura 2.2.

## 3. Circunferência

Conhecendo o plano através de um sistema de eixos ortogonais, definiremos uma figura geométrica plana de modo natural com um subconjunto do plano. Para esta definição utilizaremos as coordenadas de um ponto no plano. Sejam  $P = (a, b)$  e  $Q = (c, d)$  pontos do plano  $\pi$  dados por suas coordenadas em relação a um sistema de eixos ortogonais  $OXY$ . Dado um ponto  $R = (c, b)$  no plano  $\pi$ , de modo que o triângulo  $PQR$  seja retângulo, com hipotenusa  $PQ$  e catetos  $PR$  e  $QR$  paralelos aos eixos  $OX$  e  $OY$ , respectivamente, como mostra a figura (3.1).

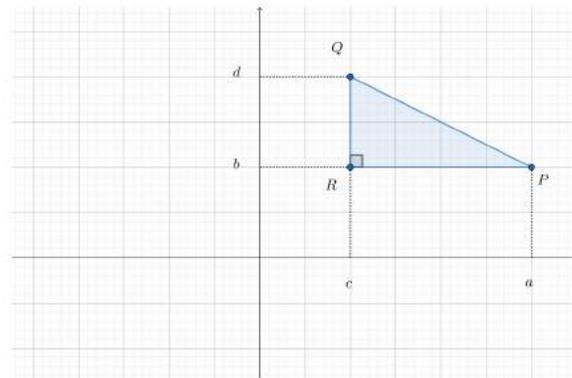


Figura 3.1: Triângulo  $PQR$  retângulo .

Como os catetos  $PR$  e  $QR$  são paralelos aos eixos e a distância entre dois pontos de um eixo é igual ao módulo da diferença de suas coordenadas, as medidas desses catetos são dadas por:

$$d(P, R) = |a - c| \quad e \quad d(Q, R) = |b - d| .$$

Pelo Teorema de Pitágoras, obtemos:

$$d(P, Q) = \sqrt{(d(P, R))^2 + (d(Q, R))^2} = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}. \quad (3.1)$$

Assim, a distância do ponto  $P = (a, b)$  ao ponto  $Q = (c, d)$  é a raiz quadrada da soma dos quadrados das diferenças das coordenadas correspondentes.

### Exemplo 3.1:

Calcule a distância do ponto  $A = (-2, 1)$  ao ponto  $B = (3, -2)$ .

*Solução.* Temos que

$$d(A, B) = \sqrt{(-2 - 3)^2 + (1 - (-2))^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}.$$

Através do cálculo da distância em coordenadas podemos obter uma caracterização algébrica da circunferência.

### Definição 3.1:

Uma **circunferência**  $C_r(P_0)$  de centro no ponto  $P_0 \in \pi$  e raio  $r > 0$  é o conjunto dos pontos do plano  $\pi$  situados à distância  $r$  do ponto  $P_0$ , como ilustra a Figura 3.2, ou seja:

$$C_r(P_0) = \{P \in \pi : d(P, P_0) = r\}.$$

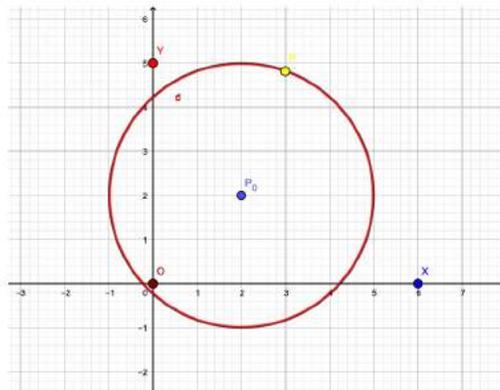


Figura 3.2: Circunferência centrada no ponto  $P_0$ , com raio  $r > 0$ .

Se  $P_0 = (a, b)$  são as coordenadas do centro de uma circunferência, num sistema de eixos ortogonais  $OXY$  do plano  $\pi$ , segue que

$$P = (x, y) \in \mathcal{C}_r(P_0) \iff d(P, P_0) = r \iff d(P, P_0)^2 = r^2 \iff (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Assim, associamos à circunferência  $\mathcal{C}_r(P_0)$  a equação

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

que relaciona a abscissa com a ordenada de cada um de seus pontos. Isto é,

$$\mathcal{C}_r(P_0) = \{(x, y) \in \pi : (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}.$$

Por meio dessa equação, as propriedades geométricas da circunferência podem ser deduzidas algebricamente.

### Exemplo 3.2:

A equação da circunferência de centro sobre um ponto  $P_0 = (0, 0)$  e raio de medida 3, como ilustra a Figura 3.3, é dada por:

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 3^2,$$

isto é  $x^2 + y^2 = 9$ .

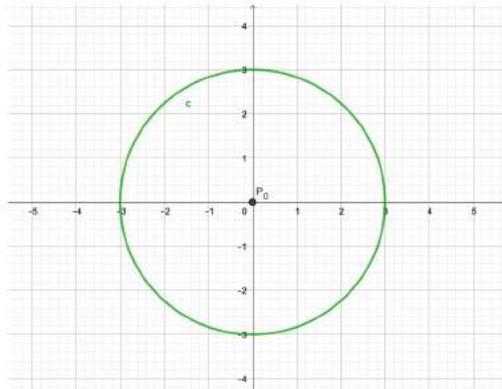


Figura 3.3: Uma circunferência de raio 3 e centro  $P_0 = (0, 0)$ .

Note que o ponto  $A = (0, 3)$  pertence a circunferência  $\mathcal{C}_3(0, 0)$ , pois

$$(0 - 0)^2 + (3 - 0)^2 = 9.$$

Da mesma forma, o ponto  $B = (2, \sqrt{5})$  também pertence, pois

$$2^2 + (\sqrt{5})^2 = 9.$$

Já o ponto  $D = (-2, -3)$  não pertence à circunferência, pois

$$(-2)^2 + (-3)^2 = 13 \neq 9.$$

### Exemplo 3.3:

A equação da circunferência de centro sobre o ponto  $P_0 = (3, 4)$  e raio de medida 3, como ilustra a Figura (3.4), é dada por:

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 9.$$

Note que o ponto  $A = (0, 4)$  pertence a circunferência  $\mathcal{C}_4(3, 4)$ , pois:

$$(0 - 3)^2 + (4 - 4)^2 = 9.$$

O ponto  $D = (4, 3)$  não pertence, pois

$$(4 - 3)^2 + (3 - 4)^2 \neq 9.$$

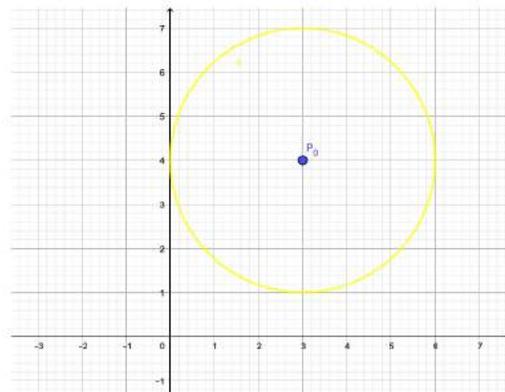


Figura 3.4: Circunferência centrada no ponto  $(3, 4)$  e raio 3.

Colocaremos uma orientação na circunferência da seguinte maneira. Considere dois pontos  $A$  e  $B$  na circunferência  $\mathcal{C}_r(P_0)$ . O arco anti-horário

com origem sobre o ponto  $A$ , denotado por  $\overleftarrow{\Gamma}(A, B)$ , é o conjunto de todos os pontos de  $C_r(P_0)$  entre os pontos  $A$  e  $B$ , percorrido de  $A$  até  $B$  no sentido anti-horário, como ilustra a Figura 3.5.

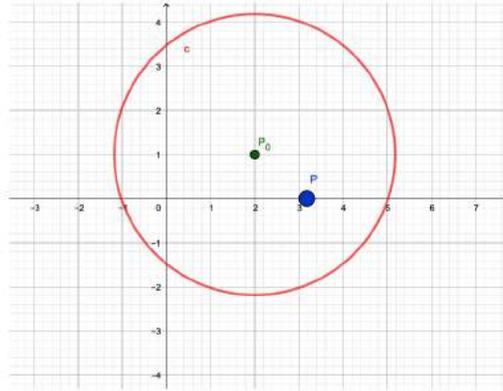


Figura 3.5: Arco anti-horário descrito em amarelo .

Por sua vez, o arco horário com origem sobre o ponto  $A$ , denotado por  $\overrightarrow{\Gamma}(A, B)$ , é o conjunto de todos os pontos de  $C_r(P_0)$  entre os pontos  $A$  e  $B$ , percorrido de  $A$  até  $B$  no sentido horário, como ilustra a Figura 3.6

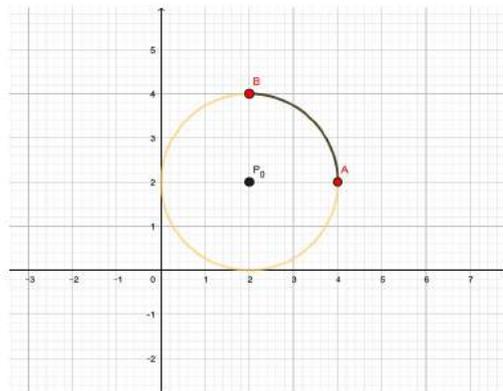


Figura 3.6: Arco horário descrito em amarelo .

O nosso objetivo não é trabalhar com a circunferência através de sua

---

equação algébrica como a definição dada acima, mas como veremos, é obter uma nova caracterização para a circunferência.

# 4. Matrizes

Definiremos matrizes formadas por elementos reais, assim como as operações envolvendo matrizes. Apresentaremos algumas matrizes, chamadas matrizes especiais. Enunciaremos os principais resultados envolvendo as operações com matrizes. O objetivo principal deste capítulo é definir matriz ortogonal. Para mais detalhes sobre matrizes consulte a referência [5].

Sejam  $m$  e  $n$  números naturais não nulos, uma tabela de  $m \times n$  números reais dispostos em  $m$  linhas (filas horizontais) e  $n$  colunas (filas verticais) é uma matriz do tipo (ou formato, ou ordem)  $m \times n$ , ou simplesmente matriz  $m \times n$ . Denotaremos usualmente uma matriz colocando seus elementos (números reais) entre parênteses ou entre colchetes.

## Exemplo 4.1:

A tabela

$$\bullet A = \begin{bmatrix} 31 & 0 & 8 & 18 \\ 34 & 1 & 13 & 0 \\ 90 & \pi & 56 & 11 \\ 0 & 0 & 34 & 1 \end{bmatrix}, \text{ é uma matriz do tipo } 4 \times 4.$$

$$\bullet B = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 8 & 0 & 12 \\ 20 & 1 & 13 & 0 & 23 \\ 90 & \pi & 56 & 11 & 29 \end{bmatrix}, \text{ é uma matriz do tipo } 3 \times 5.$$

---

Seja  $A$  uma matriz do tipo  $m \times n$ , denotaremos um elemento qualquer desta matriz da seguinte maneira:  $a_{ij}$ ; no qual o índice  $i$  refere-se à linha e o índice  $j$  refere-se à coluna em que se encontra tal elemento.

Convencionaremos que as linhas são numeradas de cima para baixo, e as colunas, da esquerda para à direita. De um modo geral, uma matriz  $A$  do tipo

$m \times n$  é representada por  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , em que  $i$  e  $j$  são números inteiros positivos tais que  $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ , e  $a_{ij}$  é um elemento qualquer de  $A$ .

**Exemplo 4.2:**

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 8 & 9 \\ 12 & 23 \end{bmatrix}_{3 \times 2}.$$

1. O elemento que está na linha 1, coluna 1, é  $a_{11} = -5$ ;
2. O elemento que está na linha 1, coluna 2, é  $a_{12} = 7$ ;
3. O elemento que está na linha 2, coluna 1, é  $a_{21} = 8$ ;
4. O elemento que está na linha 2, coluna 2, é  $a_{22} = 9$ ;
5. O elemento que está na linha 3, coluna 1, é  $a_{31} = 12$ ;
6. O elemento que está na linha 3, coluna 2, é  $a_{32} = 23$ .

---

As matrizes apresentadas a seguir, são chamadas de **matrizes especiais**.

1. **Matriz Linha:** é uma matriz formada por uma única linha

**Exemplo 4.3:**

$$A = [ \pi \quad -12 \quad 20 ],$$

é uma matriz linha  $1 \times 3$ .

---

**Exemplo 4.4:**

$$B = [ 0 \quad -17 ],$$

é uma matriz linha  $1 \times 2$ .

- 
2. **Matriz Coluna:** é uma matriz formada por uma única coluna.

**Exemplo 4.5:**

$$A = \begin{bmatrix} 34 \\ 90 \\ 41 \\ -4 \end{bmatrix},$$

é uma matriz coluna  $4 \times 1$ .

---

**Exemplo 4.6:**

$$B = \begin{bmatrix} 4 \\ \bar{5} \\ \sqrt{7} \end{bmatrix},$$

é uma matriz coluna  $2 \times 1$ .

---

3. **Matriz Nula:** é uma matriz cujos elementos são todos iguais a zero. Pode-se indicar uma matriz nula  $m \times n$  por  $0_{m \times n}$ .

**Exemplo 4.7:**

$$0_{2 \times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

é uma matriz nula  $2 \times 4$ .

---

**Exemplo 4.8:**

$$0_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

é uma matriz nula  $3 \times 3$ .

---

4. **Matriz Quadrada:** é uma matriz que possui o número de linhas iguais ao número de colunas. Se  $A$  é uma matriz quadrada do tipo  $n \times n$ , diremos que  $A$  é uma matriz quadrada de ordem  $n$ .

**Exemplo 4.9:**

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix},$$

é uma matriz quadrada de ordem 2.

---

**Exemplo 4.10:**

$$B = \begin{bmatrix} 5 & -1 & \frac{1}{3} \\ -2 & 0 & 7 \\ \sqrt{3} & 1 & 4 \end{bmatrix},$$

é uma matriz quadrada de ordem 3.

Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$ , temos que:

- i. Os elementos de  $A$  cujo índice da linha é igual ao índice da coluna constituem a **diagonal principal** de  $A$ .

**Exemplo 4.11:**

Se  $A$  é uma matriz quadrada de ordem 3, os elementos  $\mathbf{a}_{11}$ ,  $\mathbf{a}_{22}$ ,  $\mathbf{a}_{33}$  formam a diagonal principal de  $A$ .

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \mathbf{a}_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a}_{33} \end{bmatrix}.$$

- ii. Os elementos da matriz  $A$  cuja soma dos índices da linha e da coluna é igual a  $n + 1$  constituem a **diagonal secundária** de  $A$ . Retornando ao exemplo anterior, os elementos  $\mathbf{a}_{13}$ ,  $\mathbf{a}_{22}$ ,  $\mathbf{a}_{31}$  formam a diagonal secundária de  $A$ .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{a}_{13} \\ a_{21} & \mathbf{a}_{22} & a_{23} \\ \mathbf{a}_{33} & a_{32} & a_{13} \end{bmatrix}.$$

5. **Matriz Identidade.** Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$ ,  $A$  é denominada **matriz identidade de ordem  $n$**  (indica-se por  $I_n$ ) se os elementos de sua diagonal principal são todos iguais 1, e os demais elementos são iguais a zero. Assim:

- $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  é a matriz identidade de ordem 2.

- $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  é a matriz identidade de ordem 3.
- $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$  é a matriz identidade de ordem  $n$ .

## 4.1 Operações com Matrizes

Introduziremos as seguintes operações com matrizes: adição de matrizes, produto de um número real por uma matriz e produto entre matrizes. Em seguida demonstraremos as propriedades para estas operações. Iniciaremos definindo quando duas matrizes são iguais.

Duas matrizes  $A$  e  $B$  de mesma ordem  $m \times n$  são iguais se todos os seus elementos correspondentes são iguais, isto é, sendo  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $B = (b_{ij})_{m \times n}$ , temos que  $A = B$  se, e somente se,  $a_{ij} = b_{ij}$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  e para todo  $j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ .

**Exemplo 4.12:**

Para que  $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & b \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 3 & d \\ c & -5 \end{pmatrix}$  sejam iguais, devemos ter

$$\begin{cases} a = 3 \\ 1 = d \\ 2 = c \\ b = -5 \end{cases}$$

### Adição de matrizes.

Dadas duas matrizes de mesma ordem,  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $B = (b_{ij})_{m \times n}$ , a soma de  $A$  com  $B$  (representa-se por  $A + B$ ) é a matriz  $C = (c_{ij})_{m \times n}$  em que  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ , para  $1 \leq i \leq m$  e  $1 \leq j \leq n$ . Em outras palavras, a matriz soma  $C$  tem mesma ordem que  $A$  e  $B$  e é tal que cada um de seus elementos é a soma de elementos correspondentes de  $A$  e  $B$ .

Exemplo 4.13:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ -2 & 5 & \sqrt{1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -6 & 9 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 10 \\ -8 & 14 & \sqrt{1} + 1 \end{pmatrix}$$

Apresentaremos as propriedades da adição de matrizes.

#### Proposição 4.1:

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  matrizes de mesma ordem ( $m \times n$ ) e  $0_{m \times n}$  a matriz nula, de ordem  $m \times n$ , valem as seguintes propriedades para a adição de matrizes:

- (I). **Comutativa:**  $A + B = B + A$
- (II). **Associativa:**  $(A + B) + C = A + (B + C)$
- (III). **Existência do elemento neutro:** Existe  $M$  tal que  $A + M = A$ , qualquer que seja a matriz  $A_{m \times n}$ . (Observe que, nesse caso,  $M$  é a matriz nula do tipo  $m \times n$ .)
- (IV). **Existência do oposto (ou simétrico):** existe  $A'$  tal que  $A + A' = 0_{m \times n}$ .

**Demonstração.**

(I) Dadas as matrizes  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $B = (b_{ij})_{m \times n}$ , temos:

$$A + B = C = (c_{ij})_{m \times n} \text{ e } B + A = D = (d_{ij})_{m \times n}.$$

Mostraremos que

$$C = D.$$

Veja que para todo  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  e para todo  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , temos

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Usando a propriedade comutativa dos reais

$$c_{ij} = b_{ij} + a_{ij} = d_{ij},$$

e, então

$$C = D,$$

isto é

$$A + B = B + A.$$

Mostrando assim que vale a comutatividade.

(II) Dadas as matrizes  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $B = (b_{ij})_{m \times n}$  e  $C = (c_{ij})_{m \times n}$ , temos:

$$(A + B) + C = D = (d_{ij})_{m \times n} \text{ e } A + (B + C) = E = (e_{ij})_{m \times n}.$$

Mostraremos que

$$D = E.$$

Veja que para todo  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  e para todo  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , temos:

$$d_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}.$$

Usando a propriedade associativa da adição de números reais, podemos escrever:

$$d_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = e_{ij},$$

logo

$$D = E,$$

isto é

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

O que mostra a associatividade.

(III) Dadas as matrizes  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $M = (a_{ij})_{m \times n}$ , suponha que

$$A + M = A,$$

então

$$\begin{aligned} a_{ij} + m_{ij} = a_{ij} &\Leftrightarrow m_{ij} = a_{ij} - a_{ij} \\ &\Leftrightarrow m_{ij} = 0 \end{aligned}$$

para todo  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  e para todo  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Assim,

$$M = 0_{m \times n},$$

ou seja, o elemento neutro da adição é  $M$  a matriz nula.

(IV) Agora mostraremos a existência de um elemento simétrico. Dadas as matrizes  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $A' = (a'_{ij})_{m \times n}$  e  $0_{m \times n}$  a matriz nula de ordem  $m \times n$ . Suponha que

$$A + A' = 0_{m \times n}$$

então,

$$a_{ij} + a'_{ij} = 0 \Leftrightarrow a_{ij} = 0 - a'_{ij} \Leftrightarrow a'_{ij} = -a_{ij}$$

para todo  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  e para todo  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Assim,

$$A' = -A.$$

Como consequência da existência do elemento simétrico, obtemos as seguintes definições.

#### Definição 4.1:

Seja a matriz  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ . Chama-se **oposta** de  $A$  a matriz representada por  $-A$ , tal que

$$A + (-A) = 0_{m \times n}$$

onde  $0_{m \times n}$  é a matriz nula do tipo  $m \times n$ .

Note que, se  $B$  é oposta de  $A$ , então

$$A + B = 0$$

e daí, para todo  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  e  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , temos

$$a_{ij} + b_{ij} = 0 \Leftrightarrow a_{ij} = -b_{ij} \Leftrightarrow b_{ij} = -a_{ij}.$$

Observe que a matriz  $-A$  é obtida de  $A$  trocando-se o sinal de cada um de seus elementos:

**Exemplo 4.14:**

Sejam as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -9 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \sqrt{5} \\ -8 & 9 \end{pmatrix}.$$

A matriz oposta de  $A$  e oposta de  $B$  é representada, respectivamente, por:

$$-A = \begin{pmatrix} -13 & 9 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} \text{ e } -B = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & -\sqrt{5} \\ 8 & -9 \end{pmatrix}.$$

**Definição 4.2:**

Dadas duas matrizes de mesma ordem  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $B = (b_{ij})_{m \times n}$ , chama-se diferença entre  $A$  e  $B$  (representa-se por  $A - B$ ) a matriz soma de  $A$  com a oposta de  $B$ , isto é:

$$A - B = A + (-B)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & -5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Outra operação envolvendo matrizes é o produto de um número real por uma matriz, que definiremos a seguir

**Definição 4.3:**

Sejam  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $k$  um número real, o produto de  $k$  pela matriz  $A$  (indica-se  $k \cdot A$ ) é a matriz  $B = (b_{ij})_{m \times n}$  onde  $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$ , para todo

$$i \in \{1, 2, \dots, m\} \text{ e para todo } j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Isto significa que  $B$  é obtida multiplicando-se cada um dos elementos de  $A$  por  $k$ .

**Exemplo 4.15:**

Seja a matriz  $A$  dada por

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Veja que

$$\begin{aligned} 3 \cdot A &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 9 & 3 \cdot 4 & 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 27 & 12 & -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Exemplo 4.16:**

Seja a matriz  $A$  dada por

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 7 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Veja que

$$\begin{aligned} -2 \cdot A &= \begin{pmatrix} -2 \cdot (-5) & -2 \cdot 2 \\ -2 \cdot 7 & -2 \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -14 & -2\sqrt{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Em relação ao produto de um número real por uma matriz, temos as seguintes propriedades.

**Proposição 4.2:**

Sejam  $k$  e  $l$  números reais e  $A$  e  $B$  matrizes de mesma ordem, valem as seguintes propriedades:

i.  $k \cdot (l \cdot A) = (k \cdot l) \cdot A$ ;

ii.  $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$ ;

iii.  $(k + l) \cdot A = k \cdot A + l \cdot A$ ;

iv.  $1 \cdot A = A$ .

**Demonstração.**

Para o item i, sejam  $k$  e  $l \in \mathbb{R}$  e  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  uma matriz de ordem  $m \times n$ , temos

$$\begin{aligned} k \cdot (l \cdot A) &= k \cdot (l \cdot a_{ij})_{m \times n} \\ &= (k \cdot l \cdot a_{ij})_{m \times n} \\ &= (k \cdot l) (a_{ij})_{m \times n} \\ &= (k \cdot l) \cdot A. \end{aligned}$$

No item ii, sejam  $k \in \mathbb{R}$  e  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $B = (b_{ij})_{m \times n}$  duas matrizes de ordem  $m \times n$ , temos

$$\begin{aligned}k \cdot (A + B) &= k \cdot \left( (a_{ij})_{m \times n} + (b_{ij})_{m \times n} \right) \\&= k \cdot (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n} \\&= (k \cdot (a_{ij} + b_{ij}))_{m \times n} \\&= (k \cdot a_{ij} + k \cdot b_{ij})_{m \times n} \\&= (k \cdot a_{ij})_{m \times n} + (k \cdot b_{ij})_{m \times n} \\&= k \cdot (a_{ij})_{m \times n} + k \cdot (b_{ij})_{m \times n} \\&= k \cdot A + k \cdot B.\end{aligned}$$

Mostraremos agora os itens iii e iv. Sejam  $k$  e  $l \in \mathbb{R}$  e  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  uma matriz de ordem  $m \times n$ , temos

$$\begin{aligned}(k + l) \cdot A &= (k + l) \cdot (a_{ij})_{m \times n} \\&= ((k + l) \cdot a_{ij})_{m \times n} \\&= (k \cdot (a_{ij}) + l \cdot (a_{ij}))_{m \times n} \\&= k \cdot (a_{ij})_{m \times n} + l \cdot (a_{ij})_{m \times n} \\&= k \cdot A + l \cdot A.\end{aligned}$$

O que prova o item iii. Seja  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  uma matriz de ordem  $m \times n$ , temos

$$\begin{aligned}1 \cdot A &= 1 \cdot (a_{ij})_{m \times n} \\&= (1 \cdot a_{ij})_{m \times n} \\&= (a_{ij})_{m \times n} \\&= A.\end{aligned}$$

Assim, como à adição de matrizes e o produto de um número real por uma matriz, faz sentido falar em produto de matrizes.

**Definição 4.4:**

Dadas as matrizes  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $B = (b_{jk})_{n \times p}$ , chama-se **produto de A por B**, e se indica  $A \cdot B$ , a matriz  $C = (c_{ik})_{m \times p}$ , em que

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + a_{i3} \cdot b_{3k} + a_{i4} \cdot b_{4k} + \dots + a_{in} \cdot b_{nk},$$

para todo  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  e todo  $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ .

Note que

- A definição garante a existência do produto  $A \cdot B$  se o número de colunas de  $A$  é igual ao número de linhas de  $B$ .
- A matriz produto  $C = A \cdot B$  é uma matriz cujo número de linhas é igual ao número de linhas de  $A$  e o número de colunas é igual ao número de colunas de  $B$ , ou seja,

$$A_{(m \times n)} \cdot B_{(n \times p)} = C_{(m \times p)}.$$

**Exemplo 4.17:**

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 5 \\ (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 & (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 11 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vejamos as propriedades do produto de matrizes, assim com as demonstrações dessa propriedades.

**Proposição 4.3:**

Se  $A$  é quadrada de ordem  $n$ , então

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A.$$

**Demonstração.**

Seja  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  uma matriz quadrada de ordem  $n$  e  $I_n$  a matriz identidade de ordem  $n$ , temos:

$$\begin{aligned}
A \cdot I_n &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot 1 + a_{12} \cdot 0 + \cdots + a_{1n} \cdot 0 & \cdots & a_{11} \cdot 0 + a_{12} \cdot 0 + \cdots + a_{1n} \cdot 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} \cdot 1 + a_{n2} \cdot 0 + \cdots + a_{nn} \cdot 0 & \cdots & a_{n1} \cdot 0 + a_{n2} \cdot 0 + \cdots + a_{nn} \cdot 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \cdot a_{11} + 0 \cdot a_{12} + \cdots + 0 \cdot a_{1n} & \cdots & 0 \cdot a_{11} + 0 \cdot a_{12} + \cdots + 1 \cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 \cdot a_{n1} + 0 \cdot a_{n2} + \cdots + 0 \cdot a_{nn} & \cdots & 0 \cdot a_{n1} + 0 \cdot a_{n2} + \cdots + 1 \cdot a_{nn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\
&= I_n \cdot A.
\end{aligned}$$

**Proposição 4.4:**

Se  $A = (a_{ij})_{n \times m}$ , com  $m \neq n$ , então

$$I_n \cdot A = A \text{ e } A \cdot I_m = A.$$

**Demonstração.**

$$\begin{aligned}
 I_n \cdot A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_n \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}_{n \times m} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 \cdot a_{11} + 0 \cdot a_{21} + \cdots + 0 \cdot a_{n1} & \cdots & 1 \cdot a_{1m} + 0 \cdot a_{2m} + \cdots + 0 \cdot a_{nm} \\ 0 \cdot a_{11} + 1 \cdot a_{21} + \cdots + 0 \cdot a_{n1} & \cdots & 0 \cdot a_{1m} + 1 \cdot a_{2m} + \cdots + 0 \cdot a_{nm} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 \cdot a_{11} + 0 \cdot a_{21} + \cdots + 1 \cdot a_{n1} & \cdots & 0 \cdot a_{1m} + 0 \cdot a_{2m} + \cdots + 1 \cdot a_{nm} \end{pmatrix}_{n \times m} \\
 &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}_{n \times m} \\
 &= A.
 \end{aligned}$$

O caso em que  $A \cdot I_m$ , basta proceder de maneira análoga.

#### Definição 4.5:

Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$ , a matriz  $A$  é dita **inversível** (ou **invertível**) se existe uma matriz  $B$  (quadrada de ordem  $n$ ), tal que:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n,$$

onde  $I_n$  representa a matriz identidade de ordem  $n$ .

Neste caso,  $B$  é dita **inversa** de  $A$  e é indicada por  $A^{-1}$ .

#### Exemplo 4.18:

A inversa de  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$  é  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ , pois:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2;$$

e

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Para verificar se uma matriz quadrada é ou não é inversível e, em caso afirmativo, determinar sua inversa, utilizamos um processo baseado na definição de matriz inversa e na resolução de sistemas. Vejamos um exemplo no caso da matriz  $2 \times 2$ .

**Exemplo 4.19:**

Determine, se existir, a inversa de  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ .

*Solução.* Devemos verificar se existe

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tal que

$$A \cdot A^{-1} = I_2.$$

Temos:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daí,

$$\begin{pmatrix} 3a + 2c & 3b + 2d \\ 5a + 4c & 5b + 4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Do conceito de igualdade de matrizes seguem os sistemas:

$$\begin{cases} 3a + 2c = 1 \\ 5a + 4c = 0 \end{cases}$$

cuja solução é

$$a = 2 \text{ e } c = -\frac{5}{2}$$

e

$$\begin{cases} 3b + 2d = 0 \\ 5b + 4d = 1 \end{cases}$$

cuja solução é

$$b = -1 \text{ e } d = \frac{3}{2}.$$

Assim,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

**Exemplo 4.20:**

Determine, se existir, a inversa de  $X = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

*Solução.* Devemos verificar se existe

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tal que

$$X \cdot X^{-1} = I_2.$$

Temos:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daí,

$$\begin{pmatrix} 4a + 2c & 4b + 2d \\ 2a + c & 2b + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{cases} 4a + 2c = 1 \\ 2a + c = 0 \end{cases} \quad (1) \text{ e } \begin{cases} 3b + 2d = 0 \\ 5b + 4d = 1. \end{cases} \quad (2)$$

Resolvendo o sistema (1):

$$\begin{cases} 4a + 2c = 1 \\ 2a + c = 0 \end{cases} \quad (\times 2) \Rightarrow \begin{cases} 4a + 2c = 1 \\ 4a + 2c = 0. \end{cases}$$

É fácil ver que o sistema acima não admite soluções, pois não existem  $a$  e  $c$  reais tais que  $0 \cdot a + 0 \cdot c = 1$ . Desse modo, já podemos concluir que não existe a inversa de  $X$ .

**Observação**

O processo apresentado nesses exemplos pode ser aplicado a matrizes quadradas de ordem  $n$ ,  $n \geq 2$ . No entanto, para  $n \geq 3$  o processo é, em geral, trabalhoso.

**Definição 4.6:**

Dada uma matriz  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , chama-se **transposta de  $A$**  (indica-se por  $A^t$ ) a matriz:

$$A^t = (a'_{ij})_{n \times m}.$$

tal que  $a'_{ij} = a_{ji}$  para todo  $i$  e todo  $j$ .

Em outras palavras, a matriz  $A^t$  é obtida a partir de  $A$  trocando-se, ordenadamente, suas linhas pelas colunas.

**Exemplo 4.21:**

A transposta da matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$  é  $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$

**Exemplo 4.22:**

A transposta da matriz  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$  é  $B^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ .

**Proposição 4.5:**

Dadas as matrizes  $A$  e  $B$  do tipo  $n \times m$ , então:

I -  $(A^t)^t = A$ .

II -  $(A + B)^t = A^t + B^t$ .

III - Dado  $k \in \mathbb{R}$ ,  $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$ .

IV - Considere a matriz  $C$  de ordem  $m \times r$ , então  $(AC)^t = C^t A^t$ .

**Demonstração.** Para o item I, temos que

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}_{n \times m}.$$

Daí,

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}_{m \times n}.$$

Aplicando a definição de matriz transposta segue que

$$\begin{aligned} (A^t)^t &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}_{n \times m} \\ &= A. \end{aligned}$$

Para o item II, temos que

$$X_{n \times m} + Y_{n \times m} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2m} + b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}_{n \times m}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
 (X + Y)^t &= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{21} + b_{21} & \cdots & a_{n1} + b_{n1} \\ a_{12} + b_{12} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{n2} + b_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} + b_{1m} & a_{2m} + b_{2m} & \cdots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}_{m \times n} \\
 &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}_{m \times n} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{1m} & b_{2m} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}_{m \times n} \\
 &= X^t + Y^t.
 \end{aligned}$$

Quanto ao item III, temos que

$$k \cdot A = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & \cdots & k \cdot a_{1m} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & \cdots & k \cdot a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k \cdot a_{n1} & k \cdot a_{n2} & \cdots & k \cdot a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
 (k \cdot A)^t &= \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{21} & \cdots & k \cdot a_{n1} \\ k \cdot a_{12} & k \cdot a_{22} & \cdots & k \cdot a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k \cdot a_{1m} & k \cdot a_{2m} & \cdots & k \cdot a_{nm} \end{pmatrix} \\
 &= k \cdot A^t.
 \end{aligned}$$

Agora mostraremos o item IV, observe que

$$\begin{aligned}
 AC &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mr} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_{11}c_{11} + a_{12}c_{21} + \cdots + a_{1m}c_{m1} & \cdots & a_{11}c_{1r} + a_{12}c_{2r} + \cdots + a_{1m}c_{mr} \\ a_{21}c_{11} + a_{22}c_{21} + \cdots + a_{2m}c_{m1} & \cdots & a_{21}c_{1r} + a_{22}c_{2r} + \cdots + a_{2m}c_{mr} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}c_{11} + a_{n2}c_{21} + \cdots + a_{nm}c_{m1} & \cdots & a_{n1}c_{1r} + a_{n2}c_{2r} + \cdots + a_{nm}c_{mr} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
 (AC)^t &= \begin{pmatrix} a_{11}c_{11} + a_{12}c_{21} + \cdots + a_{1m}c_{m1} & \cdots & a_{n1}c_{11} + a_{n2}c_{21} + \cdots + a_{nm}c_{m1} \\ a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22} + \cdots + a_{1m}c_{m2} & \cdots & a_{n1}c_{12} + a_{n2}c_{22} + \cdots + a_{nm}c_{m2} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11}c_{1r} + a_{12}c_{2r} + \cdots + a_{1m}c_{mr} & \cdots & a_{n1}c_{1r} + a_{n2}c_{2r} + \cdots + a_{nm}c_{mr} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} c_{11}a_{11} + c_{21}a_{12} + \cdots + c_{m1}a_{1m} & \cdots & c_{11}a_{n1} + c_{21}a_{n2} + \cdots + c_{m1}a_{nm} \\ c_{12}a_{11} + c_{22}a_{12} + \cdots + c_{m2}a_{1m} & \cdots & c_{12}a_{n1} + c_{22}a_{n2} + \cdots + c_{m2}a_{nm} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{1r}a_{11} + c_{2r}a_{12} + \cdots + c_{mr}a_{1m} & \cdots & c_{1r}a_{n1} + c_{2r}a_{n2} + \cdots + c_{mr}a_{nm} \end{pmatrix} \\
 &= C^t A^t.
 \end{aligned}$$

#### Definição 4.7:

Uma matriz quadrada  $A$  de ordem  $n$  é dita **simétrica** se

$$A = A^t.$$

**Exemplo 4.23:**

Seja a matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ , temos que  $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ , então  $A$  é uma matriz simétrica.

**Exemplo 4.24:**

Seja a matriz  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ , temos que  $B^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ , então  $B$  é uma matriz simétrica.

#### Proposição 4.6:

A matriz identidade, de qualquer ordem, é simétrica.

**Demonstração.**

Seja  $I_n$  a matriz identidade de ordem  $n$ , assim:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I_n^t.$$

#### Proposição 4.7:

Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$ . Então:

- I - Se  $A$  é simétrica, então para qualquer escalar  $k$ , a matriz  $k \cdot A$  também é simétrica.
- II - A *matriz nula*, de qualquer ordem, é simétrica.

#### Demonstração.

Provaremos apenas o item I. Seja  $k \in \mathbb{R}$  e

$$A_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

uma matriz quadrada de ordem  $n$  tal que  $A = A^t$ . Por igualdade de matrizes, temos que

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i, j = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Assim

$$k \cdot A = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & \cdots & k \cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k \cdot a_{n1} & \cdots & k \cdot a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & \cdots & k \cdot a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k \cdot a_{1n} & \cdots & k \cdot a_{nn} \end{pmatrix} = k \cdot A^t.$$

Portanto  $k \cdot A$  é uma matriz simétrica.

**Definição 4.8:**

Uma matriz quadrada  $A$  de ordem  $n$  é dita **antissimétrica** se

$$A = -A^t.$$

Equivalentemente, os termos  $a_{ij}$ , satisfazem

$$a_{ij} = -a_{ji}.$$

**Observação**

Considerando que uma matriz  $A$  quadrada de ordem  $n$  é antissimétrica, como  $a_{ij} = -a_{ji}$  então os elementos da diagonal principal devem ser nulos. De fato,

$$a_{kk} = -a_{kk} \Leftrightarrow a_{kk} = 0.$$

onde  $k$  é inteiro,  $1 \leq k \leq n$ .

**Exemplo 4.25:**

Seja a matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -1 \\ -7 & 0 & 4 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix},$$

temos que

$$B^t = \begin{pmatrix} 0 & -7 & 1 \\ 7 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Assim,  $B = -B^t$  o que implica que  $B$  é antissimétrica.

**Exemplo 4.26:**

Seja a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix},$$

temos que

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim,  $A = -A^t$ , o que implica que  $A$  é antissimétrica.

**Definição 4.9:**

Uma matriz quadrada  $A$  de ordem  $n$  é dita **ortogonal** se  $A$  é inversível e se

$$A^{-1} = A^t.$$

Em outras palavras,  $A$  é ortogonal se

$$A \cdot A^t = A^t \cdot A = I.$$

**Observação**

Para mostrar que a uma matriz, digamos  $A$ , quadrada de ordem  $n$  é ortogonal é suficiente mostrar que

$$A \cdot A^t = I.$$

**Proposição 4.8:**

A inversa de uma matriz ortogonal também é ortogonal.

**Demonstração.**

Se  $A$  é ortogonal, então  $A^{-1} = A^t$ , assim

$$A^{-1} \cdot (A^{-1})^t = A^t \cdot (A^t)^t = A^t \cdot A = I,$$

e

$$(A^{-1})^t \cdot A^{-1} = (A^t)^t \cdot A^t = A \cdot A^t = I,$$

donde

$$A^{-1} \cdot (A^{-1})^t = (A^{-1})^t \cdot A^{-1} = I.$$

**Proposição 4.9:**

O produto de duas matrizes ortogonais é uma matriz ortogonal.

**Demonstração.**

Sejam  $A$  e  $B$  duas matrizes ortogonais de ordem  $n$ . Como  $A$  e  $B$  são invertíveis, então já vimos que  $AB$  também é invertível e que  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ . Daí

$$AB(AB)^t = AB(B^t A^t) = A(BB^t)A^t = AIA^t = AA^t = I,$$

e

$$(AB)^t AB = (B^t A^t)AB = B^t(A^t A)B = B^t IB = B^t B = I.$$

**Exemplo 4.27:**

A matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

é ortogonal, pois

$$A^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

e

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$A \cdot A^t = A^t \cdot A = I.$$


---

**Exemplo 4.28:**

A matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

é ortogonal, pois  $A$  é simétrica e

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Portanto,

$$A \cdot A^t = A^t \cdot A = I$$

---

**Exemplo 4.29:**

A matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

é ortogonal, pois  $A$  é simétrica e

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 & 0+0 \\ 0+0 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Portanto,

$$A \cdot A^t = A^t \cdot A = I.$$

---

**Exemplo 4.30:**

A matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

é ortogonal, pois  $A$  é simétrica e

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 & 0+0 \\ 0+0 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Portanto,

$$A \cdot A^t = A^t \cdot A = I.$$

---

Colocaremos todas as matrizes de ordem  $m \times n$ , com elementos reais em um conjunto da seguinte maneira.

$$M_{m \times n} = \{A = (a_{ij})_{m \times n} : a_{ij} \in \mathbb{R}\}.$$

Assim, podemos definir o conjunto das matrizes ortogonais como um subconjunto de  $M_{n \times n}$  da seguinte maneira:

$$O_{(n)} = \{A \in M(n, n); A \cdot A^t = I\}.$$

# 5. Determinante

Introduziremos a definição de determinante de uma matriz, e apresentando algumas de suas propriedades. A noção de determinante será utilizada no próximo capítulo fornecendo uma condição fundamental para a distinção entre duas maneiras diferentes de escrever a mesma figura geométrica. .

Seja  $A$  uma matriz de ordem  $n$ , afim de definirmos o determinante da matriz  $A$ , que denotaremos por  $\det A$ , consideraremos os seguintes casos para  $n \geq 1$ :

- (i) Se  $A$  é uma matriz de ordem 1, isto é,  $A = [a_{11}]$ , então o determinante da matriz  $A$  é dada pelo elemento  $a_{11}$ . Ou seja,

$$\det[a_{11}] = a_{11}.$$

**Exemplo 5.1:**

Seja a matriz  $A = [16]$ , temos que  $\det A = 16$ .

---

**Exemplo 5.2:**

Seja a matriz  $A = [-5]$ , temos que  $\det A = -5$ .

---

- (ii) Se  $A$  é uma matriz de ordem 2, isto é,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

então o determinante da matriz  $A$  é dado como a diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária. Ou seja,

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

**Exemplo 5.3:**

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

temos que  $\det A = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 5 = 6 - 5 = 1$ .

---

**Exemplo 5.4:**

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ 5 & 3 \end{bmatrix},$$

temos que  $\det A = -4 \cdot 3 - 5 \cdot 9 = -12 - 45 = -47$ .

---

(iii) Se  $A$  é uma matriz de ordem 3, isto é,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

então o determinante de  $A$  é dado por

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

**Exemplo 5.5:**

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix},$$

temos que

$$\det A = 1 \cdot 2 \cdot 8 + 3 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 0 - 3 \cdot 0 \cdot 8 = 16 + 9 + 0 - 4 - 0 - 0 = 21.$$


---

**Exemplo 5.6:**

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix},$$

temos que

$$\det A = 3 \cdot 1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 4 - 2 \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot 3 \cdot 4 - 2 \cdot 1 \cdot 5 = 15 + 12 + 8 - 4 - 36 - 10 = -15.$$

- (iv) Para definirmos o determinante de uma matriz de ordem  $n > 3$ , utilizaremos a noção de cofator, dada da seguinte maneira. Seja  $A = [a_{ij}]$  uma matriz de ordem  $n \geq 2$ , dado um elemento  $a_{ij} \in A$  o cofator de  $a_{ij}$ , denotado por  $A_{ij}$ , é definido como sendo o número:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}, \quad (5.1)$$

onde  $D_{ij}$  é o determinante da matriz resultante, obtida eliminando-se à  $i$ -ésima linha e à  $j$ -ésima coluna da matriz  $A$ .

**Exemplo 5.7:**

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

temos

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \cdot D_{11} = D_{11} = \det[3] = 3; \\ A_{12} &= (-1)^{1+2} \cdot D_{12} = -1 \cdot D_{12} = -1 \cdot \det[1] = -1 \cdot 1 = -1; \\ A_{21} &= (-1)^{2+1} \cdot D_{21} = -1 \cdot D_{21} = -1 \cdot \det[5] = -1 \cdot 5 = -5; \\ A_{22} &= (-1)^{2+2} \cdot D_{22} = D_{22} = \det[2] = 2. \end{aligned}$$

**Exemplo 5.8:**

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix},$$

temos que

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \cdot D_{11} = 1 \cdot D_{11} = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = -7; \\ A_{12} &= (-1)^{1+2} \cdot D_{12} = -1 \cdot D_{12} = -1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = 1; \\ A_{13} &= (-1)^{1+3} \cdot D_{13} = 1 \cdot D_{13} = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 2; \\ A_{21} &= (-1)^{2+1} \cdot D_{21} = -1 \cdot D_{21} = -1 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = -2; \\ A_{22} &= (-1)^{2+2} \cdot D_{22} = 1 \cdot D_{22} = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = 11; \\ A_{23} &= (-1)^{2+3} \cdot D_{23} = -1 \cdot D_{23} = -1 \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 8; \\ A_{31} &= (-1)^{3+1} \cdot D_{31} = 1 \cdot D_{31} = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = 4; \\ A_{32} &= (-1)^{3+2} \cdot D_{32} = -1 \cdot D_{32} = -1 \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = -7; \\ A_{33} &= (-1)^{3+3} \cdot D_{33} = 1 \cdot D_{33} = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1; \end{aligned}$$

Assim, se  $A$  é uma matriz de ordem  $n > 3$ , isto é,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & \cdot & & \dots & \\ & \cdot & & \dots & \\ & \cdot & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

então o determinante da matriz é dado da seguinte maneira: escolha uma linha ou uma coluna qualquer da matriz  $A$ , digamos que a nossa escolha seja a primeira coluna  $\{a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}\}$ , segue que:

$$\det A = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + \dots + a_{n1} \cdot A_{n1}. \quad (5.2)$$

**Exemplo 5.9:**

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 9 & 12 \end{bmatrix},$$

escolhendo a primeira coluna para aplicar a definição de determinante, temos que

$$\det A = 0 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} + 1 \cdot A_{41} = 1 \cdot (-15) = -15.$$

Como a noção de cofator faz sentido para todo  $n \geq 2$ , segue que a partir da equação (5.2), obtemos a definição de determinante dada para matrizes de ordem 2 e 3. Assim, se  $A = [a_{ij}]$  é uma matriz quadrada de ordem  $n > 1$ , então o determinante de  $A$  é dado por (5.2).

**Exemplo 5.10:**

Se uma matriz de ordem  $n > 1$ , tiver uma linha ou uma coluna formada apenas por zeros, então esta matriz possui determinante igual à zero.

*Solução.* Seja  $A$  uma matriz de ordem  $n$ , dada da seguinte maneira:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1p-1} & 0 & a_{1p+1} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2p-1} & 0 & a_{2p+1} \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{np-1} & 0 & a_{np+1} \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

escolhendo a coluna  $p$  que é formada apenas por zeros, por definição temos que

$$\det A = 0 \cdot A_{1p} + 0 \cdot A_{2p} + \dots + 0 \cdot A_{np} = 0.$$

A seguir enunciaremos algumas propriedades de determinantes. As demonstrações serão omitidas, o leitor interessado pode consultar a referência [1].

Se  $A$  é uma matriz de ordem  $n$ , então

$$\det A = \det A^t.$$

**Exemplo 5.11:**

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

temos que sua transposta é dada por

$$A^t = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Donde  $\det A^t = \det A = 7$ .

Seja  $A$  uma matriz de ordem  $n$ . Se  $\lambda$  é uma constante real, então

$$\det \lambda \cdot A = \lambda^n \cdot \det A.$$

**Exemplo 5.12:**

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -4 & -4 \\ -2 & -2 & -6 \\ -4 & -8 & -10 \end{bmatrix},$$

temos que

$$\det A = \det \begin{bmatrix} -6 & -4 & -4 \\ -2 & -2 & -6 \\ -4 & -8 & -10 \end{bmatrix} = (-2)^3 \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} = 120.$$

Seja  $A$  uma matriz de ordem  $n \geq 2$ . Se trocamos a posição de duas linhas ou de duas colunas paralelas, obtemos uma nova matriz  $B$ , tal que

$$\det B = -\det A.$$

**Exemplo 5.13:**

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

trocando a primeira linha pela terceira linha, obtemos a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Segue que

$$\det B = -\det \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 52$$

Se uma matriz de ordem  $n \geq 2$  tem duas linhas ou duas colunas paralelas iguais, então

$$\det A = 0.$$

**Exemplo 5.14:**

$$\det \begin{bmatrix} a & 3 & 2 & a \\ b & 1 & 10 & b \\ c & 4 & 12 & c \\ d & -23 & 18 & d \end{bmatrix} = 0.$$

Se uma matriz de ordem  $n \geq 2$  tem duas linhas ou duas colunas paralelas, formadas por elementos respectivamente proporcionais, então

$$\det A = 0.$$

**Exemplo 5.15:**

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix},$$

temos que a primeira coluna é obtida multiplicando por 6 a segunda coluna. Assim,

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 12 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

**Exemplo 5.16:**

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 10 & 5 \\ 0 & 4 & 12 & 6 \\ 2 & -23 & 18 & 9 \end{bmatrix},$$

temos que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 10 & 5 \\ 0 & 4 & 12 & 6 \\ 2 & -23 & 18 & 9 \end{bmatrix} = 0.$$

A proposição a seguir é conhecida como Teorema de Binet. Se  $A$  e  $B$  são duas matrizes quadradas de ordem  $n$ , então

$$\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B).$$

**Exemplo 5.17:**

Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix},$$

temos

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 13 \\ 6 & 29 \end{bmatrix}.$$

Assim,  $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = -2 \cdot 10$ .

Como consequência do Teorema de Binet (Proposição (5)), o corolário a seguir fornece uma maneira de calcular o determinante de matriz inversa.

**Corolário 5.1:**

Se a matriz  $A$  tem determinante não-nulo, então

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

---

**Exemplo 5.18:**

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

temos que

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = -\frac{1}{2}.$$

---

# 6. Uma Nova Maneira de Escrever Uma Circunferência

No capítulo 3 vimos que a circunferência de raio  $r > 0$  é um subconjunto do plano formado por todos os pontos do plano que distam  $r$  de um ponto fixo. Partindo desta noção, combinado com a distância entre dois pontos no plano, chegamos a uma equação algébrica que representa a circunferência.

No presente capítulo reescreveremos a mesma figura geométrica, a circunferência, utilizando operações com matrizes. Assim, dados dois pontos quaisquer sobre uma circunferência sempre encontraremos uma matriz de ordem 2 que relaciona estes pontos. Este capítulo é baseado nos trabalhos dos autores: (de Aguiar; Souza, [2]-[3]) e (Oliveira; Souza, [6]-[7]).

## 6.1 A Circunferência Escrita Como um Produto de Matrizes

Iniciamos escrevendo uma circunferência como um produto de matrizes. Mais precisamente, escreveremos os pontos sobre uma circunferência centrada na origem através do produto de matrizes.

Seja  $O_{(2)}$  o conjunto das matrizes ortogonais de ordem 2, isto é,

$$O_{(2)} = \{A; A \cdot A^t = I_2\}$$

e como adotado no capítulo 3, denotamos por  $\mathcal{C}_r$  a circunferência de centro  $(0, 0)$  e raio  $r$ . Identificaremos os pontos de um plano através de matrizes. Seja um plano  $\pi$  com um sistema de eixos ortogonais  $OXY$ , podemos representar o plano  $\pi$  da seguinte maneira:

$$\pi = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

Assim, cada ponto  $P \in \pi$  será representado por  $P = (x, y)$ , e naturalmente representaremos  $P$  por uma matriz coluna

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Como uma circunferência  $\mathcal{C}_r(P_0)$  é um subconjunto do plano  $\pi$ , onde

$$P_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix},$$

então representaremos cada ponto  $P$  da circunferência  $\mathcal{C}_r(P_0)$  por uma matriz coluna:

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

tal que  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ . Em particular,

$$\mathcal{C}_r = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = r^2 \right\}.$$

Mostraremos que o produto de uma matriz ortogonal de ordem 2 por um ponto da circunferência  $\mathcal{C}_r$  ainda é um ponto em  $\mathcal{C}_r$ .

**Proposição 6.1:**

Sejam a circunferência

$$\mathcal{C}_r = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2 \right\},$$

e o conjunto

$$O_{(2)} = \{A : A \cdot A^t = I_2\}.$$

Se  $P_0 \in \mathcal{C}_r$ , então para toda matriz  $A \in O_{(2)}$  tem-se que  $A \times P_0 \in \mathcal{C}_r$ .

**Demonstração.**

De fato, dada uma matriz ortogonal

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

e seja um ponto na circunferência  $\mathcal{C}_r$

$$P_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

Temos que

$$A \cdot P_0 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_0 + by_0 \\ cx_0 + dy_0 \end{bmatrix},$$

daí

$$(ax_0 + by_0)^2 + (cx_0 + dy_0)^2 = x_0^2(a^2 + c^2) + y_0^2(b^2 + d^2) + 2x_0y_0(ab + cd) \quad (1)$$

Por hipótese, temos que

$$A^t \cdot A = I_2,$$

isto é,

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1), obtemos

$$x_0^2 \cdot 1 + y_0^2 \cdot 1 + 2x_0y_0 \cdot 0 = x_0^2 + y_0^2.$$

Temos ainda por hipótese que

$$P_0 \in \mathcal{C}_r \iff x_0^2 + y_0^2 = r^2.$$

Portanto,

$$(ax_0 + by_0)^2 + (cx_0 + dy_0)^2 = r^2.$$

Assim, segue que

$$A \cdot P_0 \in \mathcal{C}_r.$$

completando a demonstração.

Exemplo 6.1:

Consideramos a matriz coluna  $P_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ , sobre o plano como ilustra a Figura 6.1

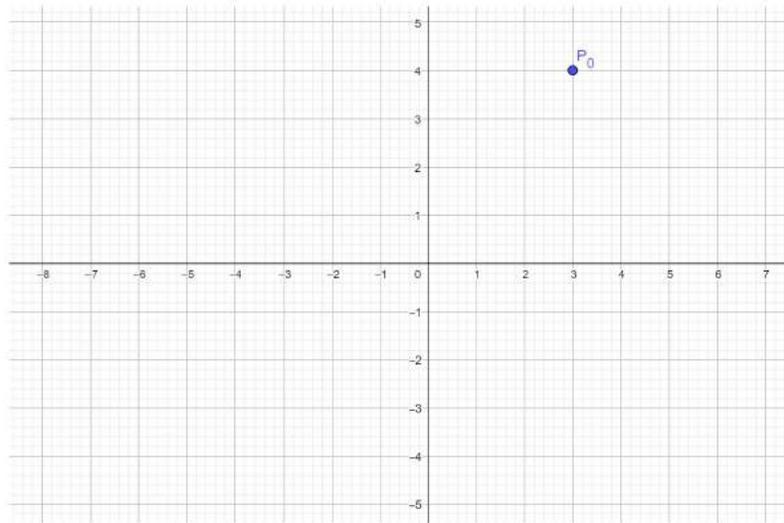


Figura 6.1: O ponto  $P_0$  sobre o plano .

A Proposição 6.1 garante que multiplicando uma matriz ortogonal de ordem dois  $A$ , pelo ponto  $P_0$ , obtemos uma matriz coluna sobre uma circunferência de centro na origem e raio 5. Ou seja, multiplicando matrizes ortogonais de ordem dois pelo ponto  $P_0$  sempre obtemos um ponto sobre a circunferência de centro da origem e raio 5.

## 6.1. A CIRCUNFERÊNCIA ESCRITA COMO UM PRODUTO DE MATRIZES

52

Assim, partindo do ponto  $P_0$  obtemos os demais pontos da circunferência de raio 5, como ilustra a Figura 6.2.

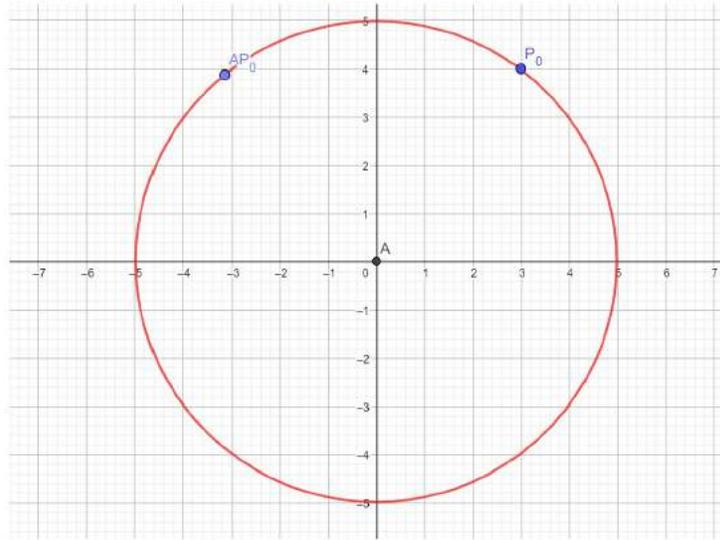


Figura 6.2: O produto  $AP_0$  sobre a circunferência.

As proposições a seguir, mostram que qualquer circunferência de centro na origem e raio  $r > 0$  está contida no produto de  $O_{(2)}$  por um ponto que pertence a própria circunferência  $\mathcal{C}_r$ .

### Proposição 6.2:

Sejam uma circunferência

$$\mathcal{C}_r = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2 \right\}$$

e o conjunto

$$O_{(2)} = \{A : A \cdot A^t = I_2\}.$$

Se  $P_0 = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$ , então para todo ponto  $P \in \mathcal{C}_r$  tem-se que  $P = A \times P_0$  para alguma matriz  $A \in O_{(2)}$ , onde  $r > 0$ .

**Demonstração.**

Dado um ponto arbitrário  $P \in \mathcal{C}_r$ , mostraremos que existe uma matriz  $A \in O_{(2)}$  tal que

$$A \cdot P_0 = P.$$

Dividiremos a prova em dois casos:

**Caso I.** Suponhamos que o ponto  $P$  seja dado por  $P = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$ , tomamos a matriz  $A$  como sendo a matriz identidade de ordem 2. Isto mostra o que queremos.

**Caso II.** Suponhamos que  $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  e seja  $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ , temos que

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a = \frac{x}{r} \\ b = \frac{y}{r} \end{cases}$$

Como  $A \in O_{(2)}$ , então

$$A \cdot A^t = I_2 \iff \begin{bmatrix} \frac{x^2}{r^2} + c^2 & \frac{xy}{r^2} + cd \\ \frac{xy}{r^2} + cd & \frac{y^2}{r^2} + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Segue, por igualdade de matrizes, que

$$\frac{x^2}{r^2} + c^2 = 1 \iff c = \pm \frac{y}{r}.$$

Substituindo o caso,  $c = \frac{y}{r}$  em  $\frac{xy}{r^2} = -cd$ , obtemos que

$$d = -\frac{x}{r}.$$

Desta forma,

$$A = \begin{bmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} \\ \frac{y}{r} & -\frac{x}{r} \end{bmatrix}.$$

Como  $A$  é ortogonal, então

$$A \cdot A^t = A^t \cdot A = I$$

daí, todas as condições são satisfeitas, pois  $A \in O_{(2)}$ ,  $P_0$  e  $P \in \mathcal{C}_r$  e

$$\begin{bmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} \\ \frac{y}{r} & -\frac{x}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Caso tenhamos,  $c = -\frac{y}{r}$  o resultado é análogo.

Note que no caso em que

$$P_0 = \begin{bmatrix} -r \\ 0 \end{bmatrix}, P_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix} \text{ e } P_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -r \end{bmatrix},$$

Para todo  $r > 0$  a construção é análoga a obtida na demonstração acima. Isto completa a demonstração.

Exemplo 6.2:

Consideramos a matriz coluna  $P = \begin{bmatrix} 3 \\ \sqrt{7} \end{bmatrix}$ , sobre a circunferência de centro na origem e raio 4 como ilustra a Figura 6.3

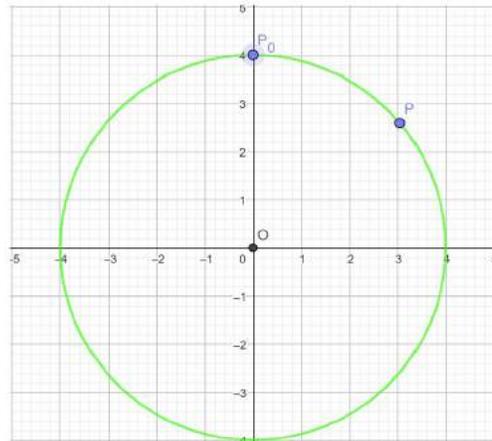


Figura 6.3: O ponto  $P$  sobre a circunferência .

A Proposição 6.2 garante que existe uma matriz ortogonal  $A$  tal que  $P = AP_0$ . Além disso, a matriz ortogonal  $A$  é dada através da demonstração da Proposição 6.2. Ou seja, conhecendo quaisquer dois pontos sobre a circunferência de centro na origem e raio 4, obtemos a matriz ortogonal que relaciona estes dois pontos.

## 6.1. A CIRCUNFERÊNCIA ESCRITA COMO UM PRODUTO DE MATRIZES

56

Assim, os pontos  $P_0$  e  $P$  são pontos sobre a circunferência, como ilustra a Figura 6.4.

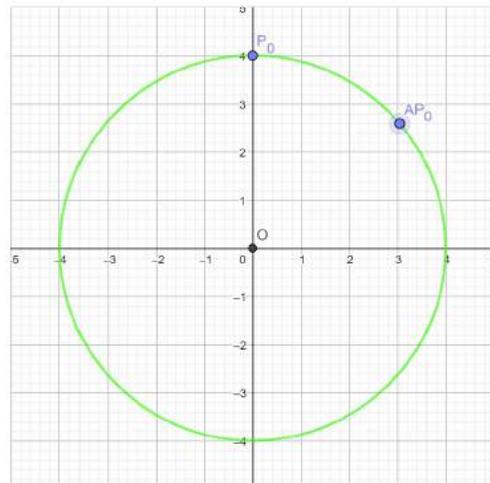


Figura 6.4: O produto  $AP_0$  sobre a circunferência.

De um modo geral, temos a seguinte inclusão.

### Proposição 6.3:

Sejam a circunferência

$$\mathcal{C}_r = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2 \right\}$$

e o conjunto

$$O_{(2)} = \{A : A \cdot A^t = I_2\}.$$

Se  $P_0 \in \mathcal{C}_r$  é um ponto qualquer então para todo ponto  $P \in \mathcal{C}_r$  tem-se que  $P = A \times P_0$  para alguma matriz  $A \in O_{(2)}$ .

**Demonstração.**

Se o ponto  $P_0$  é da forma

$$P_0 = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix},$$

então pela Proposição 6.2, obtemos o desejado.

Suponhamos que  $P_0 \in \mathcal{C}_r$  seja diferente dos casos estudados anteriormente, isto é,

$$P_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix},$$

com  $x_0 \neq 0$  e  $y_0 \neq 0$ . Dada uma matriz ortogonal

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

e um ponto  $P \in \mathcal{C}_r$ , temos que

$$A^t \cdot P_0 = P \iff \begin{cases} a = \frac{x - cy_0}{x_0} & (1) \\ b = \frac{y - dy_0}{x_0} & (2) \end{cases}$$

Por hipótese, temos que

$$A^t \cdot A = I.$$

Então

$$\begin{bmatrix} \frac{(x - cy_0)^2}{x_0^2} + c^2 & \left(\frac{x - cy_0}{x_0}\right) \left(\frac{y - dy_0}{x_0}\right) + cd \\ \left(\frac{y - dy_0}{x_0}\right) \left(\frac{x - cy_0}{x_0}\right) + cd & \frac{(y - dy_0)^2}{x_0^2} + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

De (3), temos que

$$\frac{(x - cy_0)^2}{x_0^2} + c^2 = 1 \iff c^2 r^2 - c(2xy_0) + x^2 - x_0^2 = 0.$$

Resolvendo a equação de 2º grau em  $c$ , obtemos que

$$c = \frac{xy_0 \pm x_0y}{r^2} \quad (7)$$

Considere o caso  $c = \frac{xy_0 + x_0y}{r^2}$ . Por (1), temos

$$a = \frac{xx_0 - yy_0}{r^2}$$

Por (4) e por (7)

$$d = \frac{-xx_0 + yy_0}{r^2}$$

Substituindo em (2), temos

$$b = \frac{x_0y + xy_0}{r^2}$$

Assim

$$A = \begin{bmatrix} \frac{xx_0 - yy_0}{r^2} & \frac{y_0x_0 + xy_0}{r^2} \\ \frac{x_0y + xy_0}{r^2} & \frac{-xx_0 + yy_0}{r^2} \end{bmatrix}$$

Note ainda, que a matriz  $A$  é ortogonal, logo

$$A^t \cdot A = A \cdot A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por fim, temos que

$$A^t \cdot P_0 = \begin{bmatrix} \frac{xx_0 - yy_0}{r^2} & \frac{x_0y_0 + xy_0}{r^2} \\ \frac{x_0y + xy_0}{r^2} & \frac{-xx_0 + yy_0}{r^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P$$

Assim, todas as condições são satisfeitas, pois  $A \in O_{(2)}$ ,  $P_0 \in \mathbb{S}_r^1$  e  $P \in \mathbb{S}_r^1$  e

$$A^t \cdot P_0 = P$$

Portanto,

$$\mathcal{C}_r \subset A^t \cdot P_0.$$

Para o caso em que  $c = \frac{xy_0 - x_0y}{r^2}$ , procedendo de maneira análoga, obtemos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} \frac{xx_0 + yy_0}{r^2} & \frac{yx_0 - xy_0}{r^2} \\ \frac{xy_0 - x_0y}{r^2} & \frac{xx_0 + yy_0}{r^2} \end{bmatrix}.$$

Donde obtemos o desejado.

### Exemplo 6.3:

Consideramos a matriz coluna  $P = \begin{bmatrix} 3 \\ \sqrt{7} \end{bmatrix}$ , sobre a circunferência de centro na origem e raio 4 como ilustra a Figura 6.5

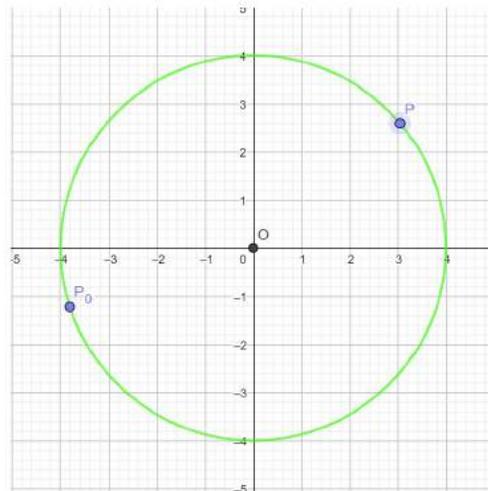


Figura 6.5: O ponto  $P$  sobre a circunferência .

A Proposição 6.3 garante que existe uma matriz ortogonal  $A$  tal que  $P = AP_0$ . O melhor de tudo é que a matriz ortogonal  $A$  é dada através da

demonstração da Proposição 6.3.

Assim, de um modo geral relacionamos os pontos  $P_0$  e  $P$  sobre a circunferência de centro na origem e raio 4, como ilustra a Figura 6.6.

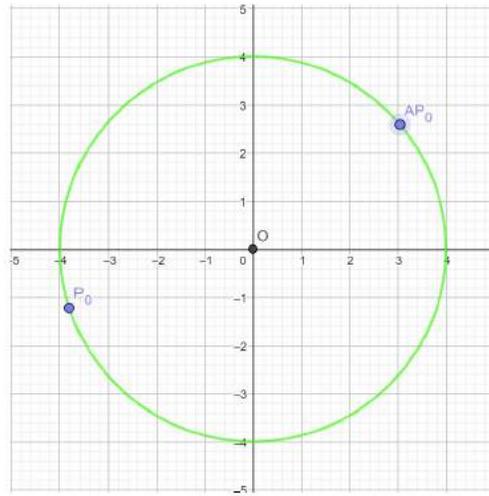


Figura 6.6: O produto  $AP_0$  sobre a circunferência.

Segue pelas proposições 6.1-6.2 e 6.3 que a circunferência de centro na origem e raio  $r > 0$  fica completamente determinada através do produto de matrizes ortogonais por um ponto que pertence a circunferência. Ou seja, conhecendo-se um ponto  $P_0$  sobre a circunferência de centro na origem e raio  $r > 0$ ,  $\mathcal{C}_r$ , concluímos que  $\mathcal{C}_r$  é dada da seguinte maneira:

$$\mathcal{C}_r = \{A.P_0 : A.A^t = I_2\}. \quad (6.1)$$

Por simplicidade podemos tomar  $P_0 = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$ , e então obtemos que  $\mathcal{C}_r$  é dada por:

$$\mathcal{C}_r = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.2)$$

Em outras palavras, fatoramos todo ponto de uma circunferência centrada na origem como um produto de matrizes dada através das expressões (6.1) –

(6.2). Além disso, fatiamos todo o plano em circunferências que são dadas através das expressões (6.1) – (6.2), como ilustra a Figura 6.7.

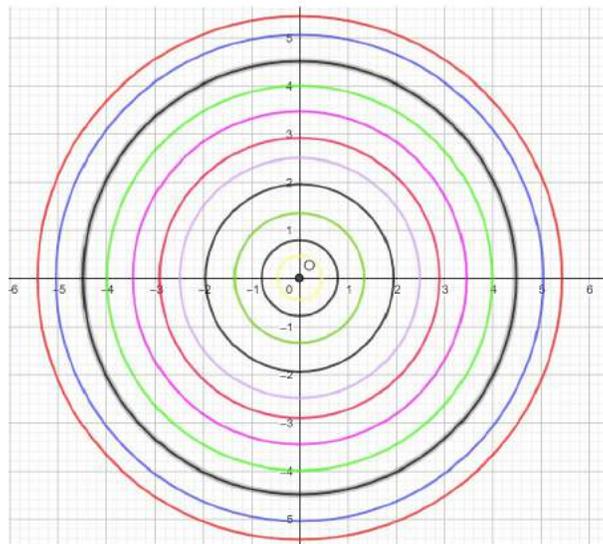


Figura 6.7: O fatiamento do plano em circunferência.

## 6.2 A Circunferência Escrita Como Produto e Soma de Matrizes

Nesta seção generalizaremos o que foi que foi feito na seção anterior. Ou seja, mostraremos que uma circunferência centrada em um ponto  $P_0$  e raio  $r > 0$ , denotada por,  $C_r(P_0)$  pode ser representada algebricamente, através de operações com matrizes ortogonais de ordem 2. Para isto, de modo análogo ao que fizemos na seção anterior, identificaremos os pontos de um plano através de matrizes. Seja um plano  $\pi$  com um sistema de eixos ortogonais  $OXY$ , podemos representar o plano  $\pi$  da seguinte maneira:

$$\pi = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

## 6.2. A CIRCUNFERÊNCIA ESCRITA COMO PRODUTO E SOMA DE MATRIZES

62

Assim, cada ponto  $P \in \pi$  será representado por  $P = (x, y)$ . Assim, de modo natural, representaremos  $P$  por uma matriz coluna, isto é

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Como uma circunferência  $\mathcal{C}_r(P_0)$  é um subconjunto do plano  $\pi$ , onde

$$P_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix},$$

então naturalmente representaremos cada ponto  $P$  da circunferência  $\mathcal{C}_r(P_0)$  por uma matriz coluna:

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

tal que  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ .

O resultado a seguir, que terá grande utilidade nos resultados posteriores, nos diz como as matrizes ortogonais podem ser obtidas.

### Proposição 6.4:

Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem 2.  $A$  é ortogonal se, e somente se,

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$$

onde  $a^2 + b^2 = 1$ . Além disso, podemos trocar  $A$  por  $A^t$ , na equivalência acima.

### Demonstração.

Considere de modo arbitrário uma matriz ortogonal  $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ . Isto é,  $A \cdot A^t = A^t \cdot A = I_2$ , onde  $I_2$  é a matriz identidade de ordem 2. Temos que,

$$A \cdot A^t = I_2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Daí,

$$\begin{bmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ba + dc & b^2 + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Disto segue que

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \\ b^2 + d^2 = 1. \end{cases}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} A^t \cdot A = I_2 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \\ c^2 + d^2 = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Obtemos através dos sistemas acima que:  $a^2 + c^2 = 1$  e  $a^2 + b^2 = 1$ , o que implica  $c^2 = b^2$ , ou seja,  $c = \pm b$ . Obtemos ainda que:  $a^2 + c^2 = 1$  e  $c^2 + d^2 = 1$ , donde  $a^2 = d^2$ , logo,  $a = \pm d$ . Além disso, temos ainda que  $ac + bd = ab + cd = 0$ , mas isto acontece se, e somente se,  $d = a$  e  $c = -b$  ou  $a = -d$  e  $c = b$ . Portanto, a matriz ortogonal  $A$  é dada de uma das seguintes maneiras:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix},$$

onde  $a^2 + b^2 = 1$ .

Reciprocamente, se

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} \text{ ou } A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix},$$

com  $a^2 + b^2 = 1$ , então

$$A \cdot A^t = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ou

$$A \cdot A^t = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

De qualquer modo,

$$A \cdot A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

### 6.2.1 Escrevendo A Circunferência Através de Matrizes - Conhecendo o Seu Centro e um Ponto da Circunferência Centrada na Origem.

O primeiro grande resultado, garante que podemos obter a circunferência  $\mathcal{C}_r(P_0)$ , através do produto de matrizes ortogonais pelo ponto  $P = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$ , como ilustra a Figura 6.8.

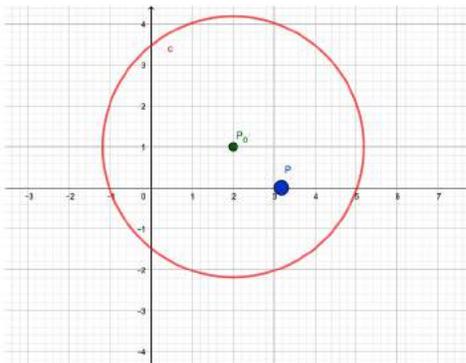


Figura 6.8: Circunferência de centro  $P_0$  e raio 3,18 .

#### Teorema 6.1:

Seja  $\mathcal{C}_r(P_0)$  uma circunferência de centro num ponto  $P_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ . Se  $P = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$ , então

$$\mathcal{C}_r(P_0) = \{AP + P_0 \quad : \quad AA^t = A^tA = I_2\}.$$

#### Demonstração.

Inicialmente, mostraremos que todos os pontos do conjunto

$$AP + P_0 \quad : \quad AA^t = A^tA = I_2$$

pertencem a circunferência  $\mathcal{C}_r(P_0)$ . Para isto, considere de modo arbitrário uma matriz  $A$ , ortogonal. Pela Proposição 6.4, temos que

$$\begin{aligned} AP + P_0 &= \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ar + x_0 \\ br + y_0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} AP + P_0 &= \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ar + x_0 \\ -br + y_0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

onde  $a^2 + b^2 = 1$ . Agora, note que

$$\begin{aligned} (ar + x_0 - x_0)^2 + (br + y_0 - y_0)^2 &= a^2r^2 + b^2r^2 \\ &= (a^2 + b^2)r^2 \\ &= r^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (ar + x_0 - x_0)^2 + (-br + y_0 - y_0)^2 &= a^2r^2 + b^2r^2 \\ &= (a^2 + b^2)r^2 \\ &= r^2. \end{aligned}$$

Com isto, fica provado que cada ponto  $AP + P_0$ , tal que  $AA^t = A^tA = I_2$ , é um ponto da circunferência  $\mathcal{C}_r(P_0)$ .

Por outro lado, seja  $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  um ponto arbitrário da circunferência  $\mathcal{C}_r(P_0)$ . Note que

$$X \in \{AP + P_0 : AA^t = A^tA = I_2\} \Leftrightarrow \exists B : X = BP + P_0,$$

com  $BB^t = B^tB = I_2$ .

Observe que a matriz

$$B = \begin{bmatrix} \frac{x - x_0}{r} & -\frac{y - y_0}{r} \\ \frac{y - y_0}{r} & \frac{x - x_0}{r} \end{bmatrix}$$

## 6.2. A CIRCUNFERÊNCIA ESCRITA COMO PRODUTO E SOMA DE MATRIZES

66

é ortogonal e  $BP + P_0 = X$ . Logo, o ponto  $X$  pertence ao conjunto  $\{AP + P_0 : AA^t = A^tA = I_2\}$ . Com isso, obtemos que

$$\mathcal{C}_r(P_0) \subset \{AP + P_0 : AA^t = A^tA = I_2\}.$$

Portanto,

$$\mathcal{C}_r(P_0) = \{AP + P_0 : AA^t = A^tA = I_2\}.$$

### Exemplo 6.4:

Seja  $\mathcal{C}_4(P_0)$  uma circunferência de raio 4, centrada no ponto  $P_0$  de abscissa 1 e ordenada 3, então podemos representar  $\mathcal{C}_4(P_0)$  pelo conjunto:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

onde  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  é ortogonal. Como ilustra a Figura 6.9.

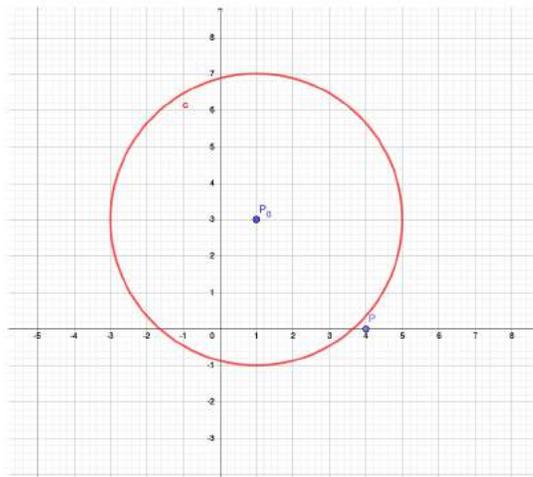


Figura 6.9: Circunferência centrada em  $P = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$  e raio 4.

---

Como consequência direta do Teorema 6.1, obtemos o seguinte corolário, que apresenta duas caracterizações distintas para a mesma circunferência.

**Corolário 6.1:**

Seja  $\mathcal{C}_r(P_0)$  uma circunferência centrada no ponto  $P_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ . Se  $P = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$ , então  $\mathcal{C}_r(P_0)$  é dada de uma das seguintes maneiras:

(i) 
$$\mathcal{C}_r(P_0) = \{AP + P_0 : AA^t = I_2 \text{ e } \det A = 1\}.$$

(ii) 
$$\mathcal{C}_r(P_0) = \{AP + P_0 : AA^t = I_2 \text{ e } \det A = -1\}.$$

**Demonstração.**

(i) Com efeito, pelo Teorema 6.1 temos que cada ponto do conjunto

$$\{AP + P_0 : \det A = 1\}$$

pertence a circunferência  $\mathcal{C}_r(P_0)$ . Mostraremos apenas que cada ponto da circunferência  $\mathcal{C}_r(P_0)$  pertence ao conjunto  $\{AP + P_0 : \det A = 1\}$ . Para isto, tomamos arbitrariamente um ponto  $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_r(P_0)$ . Observe que

$$X \in \{AP + P_0 : \det A = 1\} \Leftrightarrow \exists B : X = BP + P_0,$$

com  $BB^t = B^tB = I_2$  e  $\det B = 1$ . Veja que a matriz

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix},$$

onde

$$\begin{cases} a = \frac{x - x_0}{r} \\ b = \frac{y - y_0}{r} \end{cases},$$

cumpra a igualdade.

Portanto, fica provado o item (i).

A demonstração de (ii) é análoga, basta considerar uma matriz  $B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$ , onde  $a^2 + b^2 = 1$ . Daí, segue-se que dado  $X \in \mathcal{C}_r(P_0)$ , tem-se que

$$X \in \{AP + P_0 : AA^t = A^tA = I_2 \text{ e } \det A = -1\}.$$

**Exemplo 6.5:**

Considere  $\mathcal{C}_3(P_0)$  a circunferência de raio 3, centrada no ponto  $P_0$  de abscissa  $-1$  e ordenada  $-1,5$ , então podemos representar  $\mathcal{C}_3(P_0)$  de uma das seguintes maneiras:

(i)

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1.5 \end{bmatrix}$$

(ii)

$$\begin{bmatrix} c & d \\ d & -c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1.5 \end{bmatrix},$$

onde  $a^2 + b^2 = 1$  e  $c^2 + d^2 = 1$ , como ilustra a Figura 6.10.

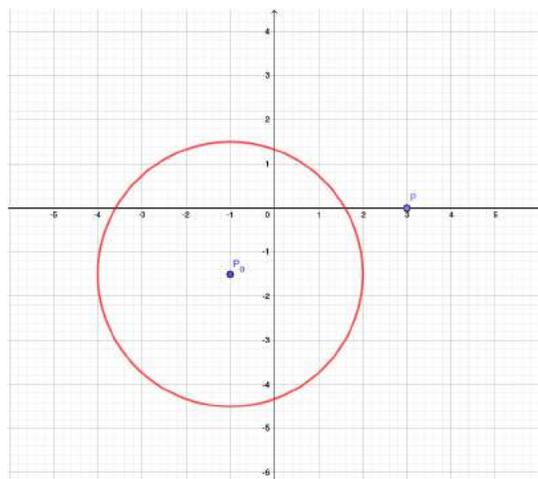


Figura 6.10: Circunferência centrada em  $P_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1.5 \end{bmatrix}$  e raio 3.

Através do Corolário 6.1, conseguimos uma reformulação dos resultados apresentados na seção anterior.

**Proposição 6.5:**

Seja  $\mathcal{C}_r(O)$  uma circunferência centrada na origem  $O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Se

$P = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$ , então  $\mathcal{C}_r(O)$  é dada de uma das seguintes maneiras:

(i) 
$$\mathcal{C}_r(O) = \{AP : AA^t = I_2 \text{ e } \det A = 1\}.$$

(ii) 
$$\mathcal{C}_r(O) = \{AP : AA^t = I_2 \text{ e } \det A = -1\}.$$

**Demonstração.** Basta toma  $P_0 = O$  no Corolário 6.1.

**Exemplo 6.6:**

Consideramos a matriz coluna  $P = \begin{bmatrix} 3 \\ \sqrt{7} \end{bmatrix}$ , sobre a circunferência de centro na origem e raio 4 como ilustra a Figura 6.11

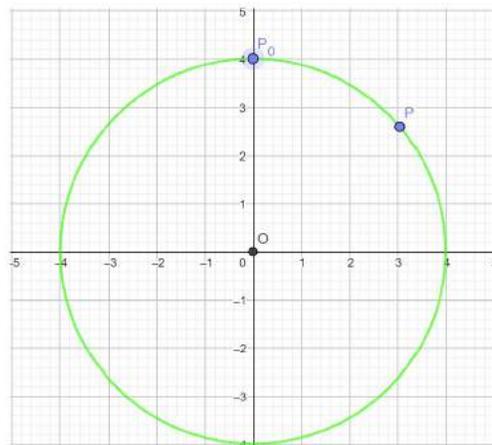


Figura 6.11: O ponto  $P$  sobre a circunferência .

A Proposição 6.5 garante que existe duas matrizes ortogonais  $A$ , uma

## 6.2. A CIRCUNFERÊNCIA ESCRITA COMO PRODUTO E SOMA DE MATRIZES

70

com  $\det A = 1$  e a outra com  $\det A = -1$  tal que  $P = AP_0$ , como ilustra a Figura 6.12.

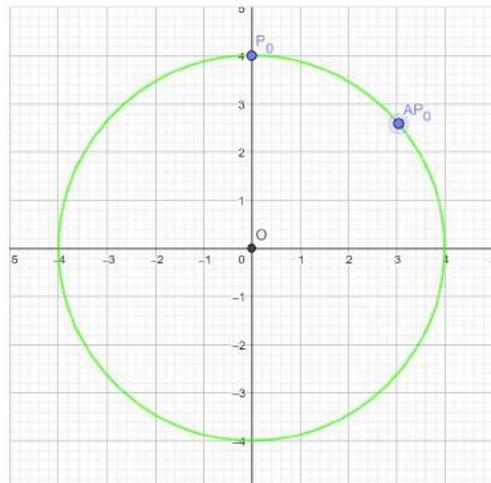


Figura 6.12: O produto  $AP_0$  sobre a circunferência.

O resultado a seguir generaliza um pouco mais o Teorema 6.1. Consideraremos um ponto  $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  e mostraremos que uma circunferência de centro  $P_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ , pode ser obtida como um produto de matrizes ortogonais por um ponto  $P \in \mathcal{C}_r(O)$ , como ilustra a Figura 6.13.

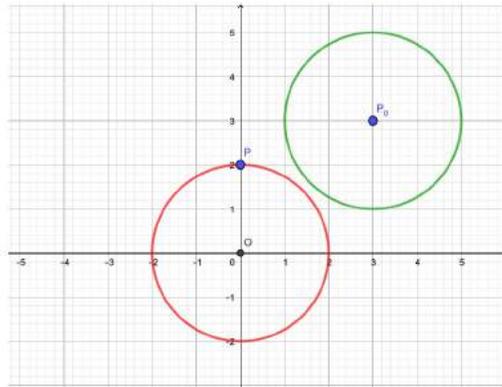


Figura 6.13: Duas circunferência de raio 2, uma centrada na origem e a outra de centro  $P_0$ .

### Teorema 6.2:

Seja  $\mathcal{C}_r(P_0)$  uma circunferência centrada num ponto  $P_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ . Se  $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  é um ponto fixo qualquer, em uma circunferência centrada na origem,  $\mathcal{C}_r(O)$ , então

$$\mathcal{C}_r(P_0) = \{AP + P_0 : AA^t = A^tA = I_2\}.$$

### Demonstração.

Considere arbitrariamente um ponto  $P = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_r(O)$  e  $A$  uma matriz ortogonal de ordem 2.

Temos que

$$\begin{aligned} A \cdot P + P_0 &= \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} au + cv + x_0 \\ bu + dv + y_0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} (au + cv + x_0 - x_0)^2 + (bu + dv + y_0 - y_0)^2 &= a^2u^2 + 2aucv + c^2v^2 + b^2u^2 + 2budv + d^2v^2 \\ &= (a^2 + b^2)u^2 + (c^2 + d^2)v^2 + 2uv(ac + bd) \end{aligned}$$

Como  $A$  é ortogonal, temos que  $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$ . Além disso  $ac + bd = 0$ . Logo,

$$(au + cv + x_0 - x_0)^2 + (bu + dv + y_0 - y_0)^2 = u^2 + v^2 = r^2,$$

pois  $d(P, O) = r$ , onde  $O$  é a origem do plano cartesiano.

Logo, o ponto  $AP + P_0$  pertence a circunferência  $\mathcal{C}_r(P_0)$ . Por outro lado, dado arbitrariamente

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_r(P_0).$$

O ponto  $X$  pertence ao conjunto

$$\{AP + P_0 : AA^t = A^tA = I_2\}$$

se, e somente se, existe uma matriz ortogonal de ordem 2,  $B$ , tal que  $X = BP + P_0$ .

Considere a matriz

$$B = \begin{bmatrix} \frac{u(x - x_0) + v(y - y_0)}{r^2} & \frac{v(x - x_0) - u(y - y_0)}{r^2} \\ -\frac{v(x - x_0) - u(y - y_0)}{r^2} & \frac{u(x - x_0) + v(y - y_0)}{r^2} \end{bmatrix}.$$

Note que

$$\begin{aligned}
 BP + P_0 &= \begin{bmatrix} \frac{u(x-x_0) + v(y-y_0)}{r^2} & \frac{v(x-x_0) - u(y-y_0)}{r^2} \\ -\frac{v(x-x_0) - u(y-y_0)}{r^2} & \frac{u(x-x_0) + v(y-y_0)}{r^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{u[u(x-x_0) + v(y-y_0)]}{r^2} + \frac{v[v(x-x_0) - u(y-y_0)]}{r^2} + x_0 \\ -\frac{u[v(x-x_0) - u(y-y_0)]}{r^2} + \frac{v[u(x-x_0) + v(y-y_0)]}{r^2} + y_0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{u^2(x-x_0) + uv(y-y_0)}{r^2} + \frac{v^2(x-x_0) - uv(y-y_0)}{r^2} + x_0 \\ -\frac{uv(x-x_0) - u^2(y-y_0)}{r^2} + \frac{vu(x-x_0) + v^2(y-y_0)}{r^2} + y_0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{(u^2 + v^2)(x-x_0)}{r^2} + x_0 \\ \frac{(u^2 + v^2)(y-y_0)}{r^2} + y_0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{r^2(x-x_0)}{r^2} + x_0 \\ \frac{r^2(y-y_0)}{r^2} + y_0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} x - x_0 + x_0 \\ y - y_0 + y_0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\
 &= X.
 \end{aligned}$$

Resta apenas mostrar que  $B$  é ortogonal. Para isto, considere

$$\begin{cases} g = \frac{u(x-x_0) + v(y-y_0)}{r^2} \\ h = \frac{v(x-x_0) - u(y-y_0)}{r^2} \end{cases} .$$

Segue-se

$$\begin{aligned} BB^t &= \begin{bmatrix} g & h \\ -h & g \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g & -h \\ h & g \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} g^2 + h^2 & -gh + hg \\ -hg + gh & h^2 + g^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Agora note que

$$\begin{aligned} g^2 + h^2 &= \left( \frac{u(x - x_0) + v(y - y_0)}{r^2} \right)^2 + \left( \frac{v(x - x_0) - u(y - y_0)}{r^2} \right)^2 \\ &= \frac{(u^2 + v^2)(x - x_0)^2 + (u^2 + v^2)(y - y_0)^2}{r^4} \\ &= \frac{r^2[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]}{r^4} \\ &= \frac{r^2 r^2}{r^4} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Daí,

$$BB^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Do mesmo modo, mostra-se que

$$B^t B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, podemos concluir que

$$\mathcal{C}_r(P_0) = \{AP + P_0 \quad : \quad AA^t = A^t A = I_2\}.$$

Isto completa a demonstração.

### Exemplo 6.7:

Considere  $\mathcal{C}_2(P_0)$  a circunferência de raio 2, centrada no ponto  $P_0$  de abscissa 2 e ordenada -3. Podemos representar  $\mathcal{C}_2(P_0)$  conhecendo apenas

um dos pontos da circunferência  $\mathcal{C}_2(O)$ . Como

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_2(O),$$

segue que podemos representar  $\mathcal{C}_2(P_0)$  da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix},$$

onde  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  é ortogonal, como ilustra a Figura 6.14.

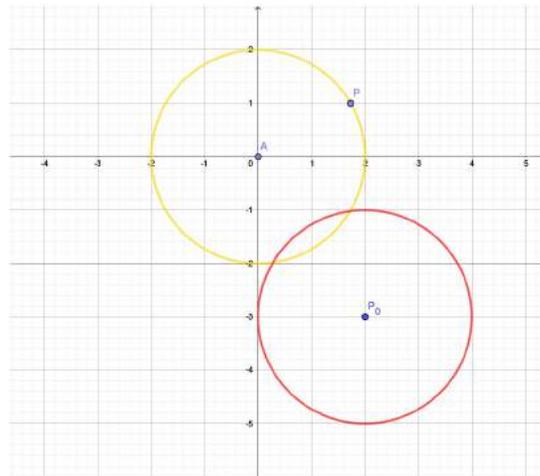


Figura 6.14: Duas circunferência de raio 2. Uma centrada na origem e a outra em  $P_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ .

Como consequência direta do Teorema 6.2, obtemos o seguinte corolário, que fornece duas maneiras distintas de escrever a mesma circunferência, através de matrizes .

**Corolário 6.2:**

Seja  $\mathcal{C}_r(P_0)$  uma circunferência de centro num ponto  $P_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ . Se

$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  é um ponto fixo qualquer na circunferência  $\mathcal{C}_r(O)$ , então  $\mathcal{C}_r(P_0)$  é dada de uma das seguintes maneiras:

(i)

$$\mathcal{C}_r(P_0) = \{AP + P_0 : AA^t = I_2 \text{ e } \det A = 1\}.$$

(ii)

$$\mathcal{C}_r(P_0) = \{AP + P_0 : AA^t = I_2 \text{ e } \det A = -1\}.$$

**Demonstração.**

(i): Pelo Teorema 6.2, temos que

$$\{AP + P_0 : AA^t = I_2 \text{ e } \det A = 1\} \subset \mathcal{C}_r(P_0).$$

Para mostrar que

$$\mathcal{C}_r(P_0) \subset \{AP + P_0 : AA^t = I_2 \text{ e } \det A = 1\},$$

consideraremos um ponto qualquer

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_r(P_0).$$

Seja a matriz ortogonal

$$A = \begin{bmatrix} \frac{u(x-x_0) - v(y-y_0)}{r^2} & -\frac{v(x-x_0) + u(y-y_0)}{r^2} \\ \frac{v(x-x_0) + u(y-y_0)}{r^2} & \frac{u(x-x_0) - v(y-y_0)}{r^2} \end{bmatrix}.$$

Temos que

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \frac{u(x-x_0) - v(y-y_0)}{r^2} & -\frac{v(x-x_0) + u(y-y_0)}{r^2} \\ \frac{v(x-x_0) + u(y-y_0)}{r^2} & \frac{u(x-x_0) - v(y-y_0)}{r^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \\
 = & \begin{bmatrix} \frac{u^2(x-x_0) - vu(y-y_0)}{r^2} - \frac{v^2(x-x_0) + uv(y-y_0)}{r^2} + x_0 \\ \frac{vu(x-x_0) + u^2(y-y_0)}{r^2} + \frac{uv(x-x_0) - v^2(y-y_0)}{r^2} + y_0 \end{bmatrix} \\
 = & \begin{bmatrix} \frac{(u^2 + v^2)(x-x_0)}{r^2} + x_0 \\ \frac{(u^2 + v^2)(y-y_0)}{r^2} + y_0 \end{bmatrix} \\
 = & \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Assim, existe uma matriz ortogonal,  $A$ , com  $\det A = 1$ , tal que  $X = AP + P_0$ .  
Portanto,

$$\mathcal{C}_r(P_0) = \{AP + P_0 : AA^t = I_2 \text{ e } \det A = 1\}.$$

O caso (ii), a demonstração é de forma análoga. Isto completa a demonstração.

Através do Corolário 6.2, conseguimos uma reformulação dos resultados apresentados na seção anterior, quando consideramos um ponto qualquer sobre a circunferência.

**Proposição 6.6:**

Seja  $\mathcal{C}_r(O)$  uma circunferência centrada na origem  $O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Se

$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  é um ponto qualquer na circunferência  $\mathcal{C}_r(O)$ , então  $\mathcal{C}_r(O)$  é dada das seguintes maneiras:

(i)

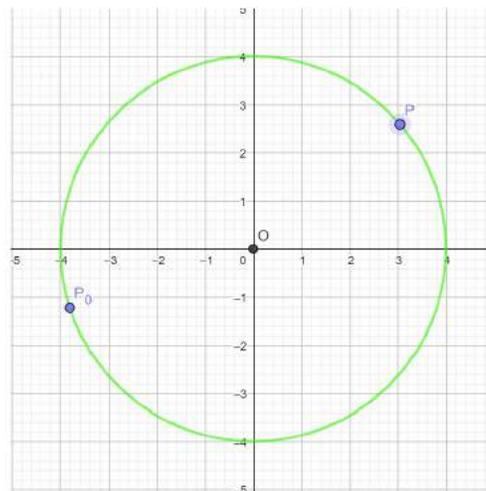
$$\mathcal{C}_r(O) = \{AP : AA^t = I_2 \text{ e } \det A = 1\};$$

(ii)

$$\mathcal{C}_r(O) = \{AP : AA^t = I_2 \text{ e } \det A = -1\}.$$

**Demonstração.**Basta assumir  $P_0 = O$  no Corolário 6.2.**Exemplo 6.8:**

Consideramos a matriz coluna  $P = \begin{bmatrix} 3 \\ \sqrt{7} \end{bmatrix}$ , sobre a circunferência de centro na origem e raio 4 como ilustra a Figura 6.15

Figura 6.15: O ponto  $P$  sobre a circunferência .

A Proposição 6.6 garante a existência de duas matrizes ortogonais  $A$ , uma matriz satisfaz a condição  $\det A = 1$  e a outra matriz satisfaz a condição  $\det A = -1$ , tal que  $P = AP_0$ .

— Ou seja, relacionamos os pontos  $P_0$  e  $P$  sobre a circunferência de duas maneiras diferentes, como ilustra a Figura 6.16.

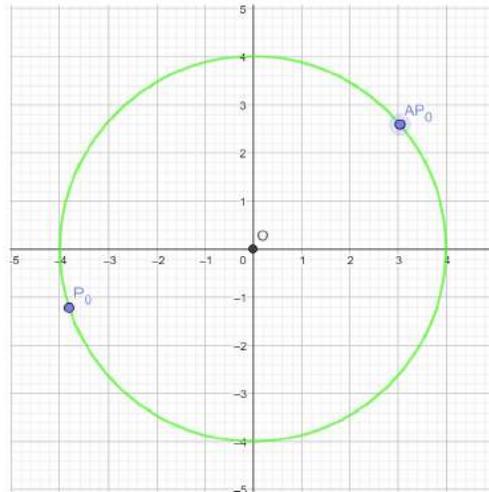


Figura 6.16: O produto  $AP_0$  sobre a circunferência.

### 6.2.2 Escrevendo a Circunferência Através de Matrizes- Conhecendo o Centro e um de Seus Pontos

De um modo geral, o resultado seguinte mostra que uma circunferência  $\mathcal{C}_r(P_0)$ , centrada num ponto  $P_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ , pode ser obtida através do produto de matrizes ortogonais pelo ponto  $P - P_0$ , onde  $P \in \mathcal{C}_r(P_0)$  é um ponto fixo qualquer, como ilustra a Figura 6.17.

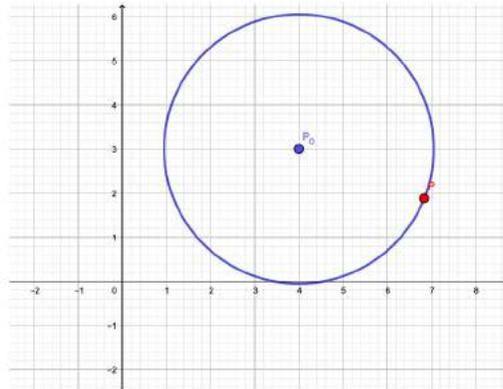


Figura 6.17: Circunferência de centro  $P_0$  e raio 3 .

### Teorema 6.3:

Seja  $C_r(P_0)$  uma circunferência de centro num ponto  $P_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ . Se

$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  é um ponto fixo qualquer em  $C_r(P_0)$ , então

$$C_r(P_0) = \{A(P - P_0) + P_0 : AA^t = A^tA = I_2\}.$$

### Demonstração.

Note que  $P - P_0 \in C_r(O)$  segue do Teorema 6.2 o resultado.

Se conhecemos um ponto qualquer de uma circunferência centrada num ponto  $P_0$ , podemos representá-la algebricamente, através de matrizes, de duas maneiras distintas.

### Corolário 6.3:

Seja  $C_r(P_0)$  uma circunferência de centro num ponto  $P_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ . Se

$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  é um ponto fixo qualquer da circunferência  $C_r(P_0)$ , então  $C_r(P_0)$  é dada de uma das seguintes maneiras:

$$(i) \quad \mathcal{C}_r(P_0) = \{A(P - P_0) + P_0 : AA^t = I_2 \text{ e } \det A = 1\};$$

$$(ii) \quad \mathcal{C}_r(P_0) = \{A(P - P_0) + P_0 : AA^t = I_2 \text{ e } \det A = -1\}.$$

**Demonstração.**

Observe que  $P - P_0 \in \mathcal{C}_r(O)$ , segue do Corolário 6.2 o resultado.

Para ilustrar o Corolário 6.3 utilizaremos o exemplo seguinte.

**Exemplo 6.9:**

Dados os pontos

$$P = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ e } Q = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Obtemos que a expressão

$$A \cdot (P - Q) + Q = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

onde  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  é uma matriz ortogonal, com  $\det A = 1$ , representa uma circunferência, como ilustra a Figura 6.18.

Do mesmo modo, a expressão

$$A \cdot (P - Q) + Q = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

onde  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  é uma matriz ortogonal, com  $\det A = -1$ , representa uma circunferência, como ilustra a Figura 6.18.

O exemplo anterior ilustra bem como uma circunferência de centro em um ponto  $P_0$  e raio  $r > 0$  pode ser representada de duas maneiras distintas através de operações com matrizes. Isto generaliza o que fizemos na seção anterior.

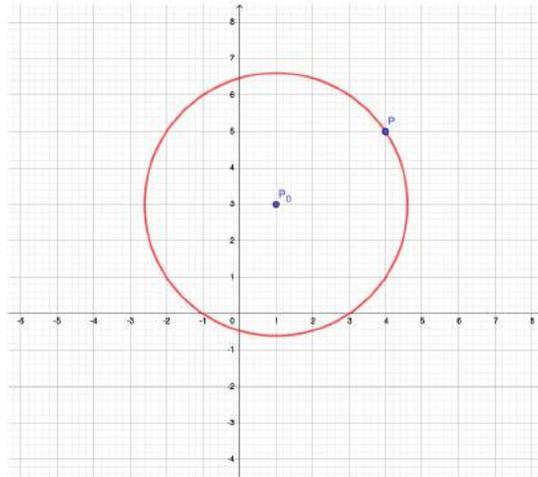


Figura 6.18: Circunferência centrada em  $Q = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$  e raio igual à  $d(P, Q)$ .

Segue pelas proposições 6.1-6.2 e 6.3 que uma circunferência de centro em um ponto qualquer e raio  $r > 0$  fica completamente determinada através de operações com matrizes que envolvem matrizes ortogonais e por um ponto que pertence a circunferência. Ou seja, conhecendo-se um ponto  $P$  sobre a circunferência de centro em um ponto  $P_0$  e raio  $r > 0$ ,  $\mathcal{C}_r(P_0)$ , concluímos que  $\mathcal{C}_r(P_0)$  é dada da seguinte maneira:

$$\mathcal{C}_r(P_0) = \{A \cdot (P - P_0) + P_0 : A \cdot A^t = I_2\}. \quad (6.3)$$

Melhor ainda, o Corolário 6.3 garante que podemos escrever a mesma circunferência  $\mathcal{C}_r(P_0)$  de duas maneira diferentes, basta escrever inicialmente a circunferência de uma maneira através da expressão (6.3) tomando  $\det A = 1$  em seguida escreva novamente a circunferência considerando  $\det A = -1$ .

## 6.2. A CIRCUNFERÊNCIA ESCRITA COMO PRODUTO E SOMA DE MATRIZES

83

Em outras palavras, fatoramos todo ponto de uma circunferência utilizando operações com matrizes dada através das expressão (6.3). Além disso, fatiamos todo o plano em circunferências que são dadas através da expressão (6.3), como ilustra a Figura 6.19.

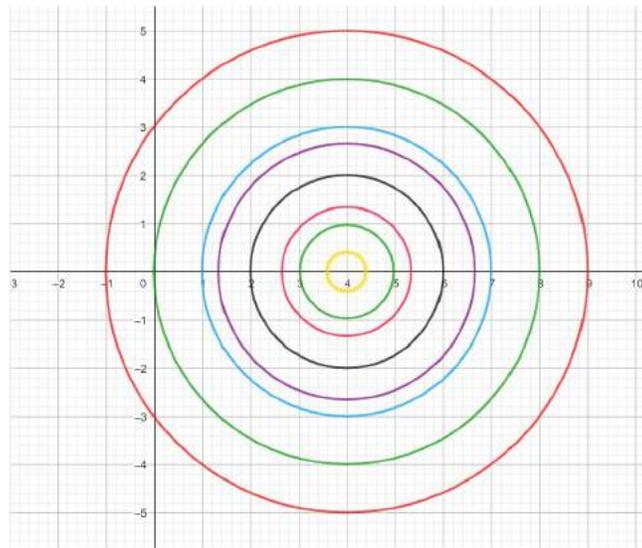


Figura 6.19: Decomposição do plano por circunferências não centradas na origem .

Segue-se ainda pelo Corolário 6.3 que o fatiamento do plano ilustrado na Figura 6.19 pode ser obtido de duas maneiras totalmente diferentes.

## 7. Sólidos Escritos Através de Operações com Matrizes

Neste capítulo, utilizando os resultados apresentados nos capítulos anteriores, encontraremos uma maneira de expressar alguns sólidos. Como estes objetos não estão situados em um plano, mas sim em um espaço, não é possível obter uma expressão para representar estes objetos através de um sistema de eixos ortogonais  $OXY$ .

A maneira natural de representar estes objetos que estão situados no espaço, seria acrescentar mais uma coordenada ao sistema de eixos ortogonais  $OXY$ . Não faremos esta abordagem neste trabalho, e encontraremos uma expressão para representar estes sólidos apenas utilizando operações com matrizes. Em todo o texto faremos uma construção para a casca que envolve o sólido, chamada de superfície, e não especificamente para o sólido.

Estas expressões, em termos matriciais, que obteremos para representar estes sólidos permite trabalhar com estas figuras, representando de modo único cada uma. Mais precisamente, representaremos a esfera, o cilindro e o cone através de operações com matrizes.

O primeiro sólido que trabalharemos, será um sólido cuja a casca que o reveste é uma esfera. O segundo sólido que representaremos sua casca, em termos matriciais, é o cilindro. Por último, escreveremos a casca que reveste o cone em termos matriciais.

## 7.1 Esferas Escritas Através de Operações Com Matrizes

Iniciamos representando a esfera através de operações com matrizes.

Seja  $\mathcal{C}_r(P_0)$  uma circunferência de centro na origem e raio  $r > 0$ . Consideramos a semicircunferência de raio  $r > 0$ , com ilustra a Figura 7.1,

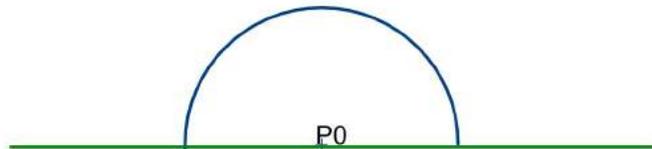


Figura 7.1: Semicircunferência .

girando-se esta semicircunferência em torno do eixo horizontal, que con-

tém o diâmetro da semicircunferência, obtemos uma figura geométrica chamada de esfera de raio  $r$  que denotaremos por  $\mathcal{E}(\mathcal{C}_r(P_0))$  como ilustra a Figura 7.2.



Figura 7.2: Esfera .

Por sua vez o diâmetro  $d = 2r$ , da circunferência, também será chamado o diâmetro da esfera. Os elementos pertencentes a esfera  $\mathcal{E}(\mathcal{C}_r(P_0))$  serão chamados de pontos.

Seja  $\mathcal{E}(\mathcal{C}_r(P_0))$  uma esfera de centro em um ponto  $P_0$  e raio  $r > 0$ , como ilustra a Figura 7.3.



Figura 7.3: Esfera .

Fixaremos dois pontos  $P_1, P_2 \in \mathcal{E}(\mathcal{C}_r(P_0))$  de tal modo que por estes pontos passe uma reta  $f$ , e o espaço entre os pontos sobre a reta  $f$  seja exatamente um intervalo limitado e fechado de comprimento  $d = 2r$ . Os pontos  $P_1$  e  $P_2$  fixados anteriormente recebem um nome especial, são chamados de polo norte e polo sul e são denotados por  $N$  e  $S$ , respectivamente como

ilustra a Figura 7.4.

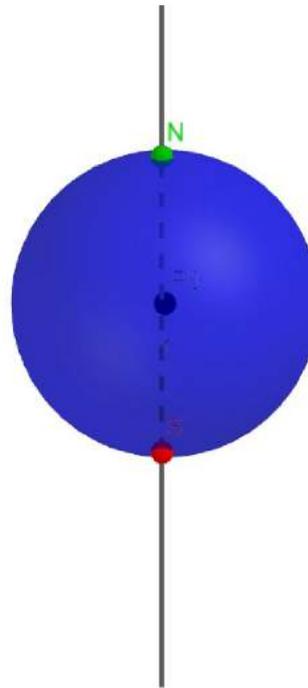


Figura 7.4: Esfera com os seus polos .

Já temos os dois polos fixados, precisamos agora de uma plano.

De acordo com a escolha dos polos, associaremos um plano  $P_0XY$  passando pelo centro da circunferência e perpendicular a reta  $f$ , como ilustra a Figura 7.5.

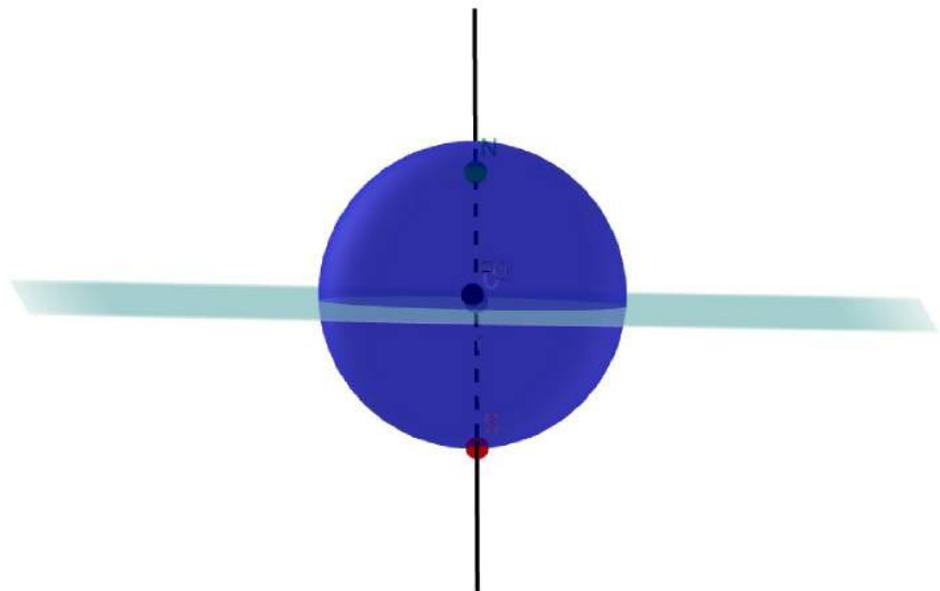


Figura 7.5: Plano horizontal .

Como passa uma reta pelos polos norte e sul, então obtemos um plano  $P_0XZ$  passando pelos polos e perpendicular ao plano  $P_0XY$ , como ilustra a Figura (7.6). Os planos paralelos ao plano  $P_0XY$  serão chamados planos horizontais, enquanto que os planos perpendiculares ao plano  $P_0XY$  serão

chamados de planos verticais. Em particular, o plano  $P_0XY$  é um plano horizontal e o plano que contém a reta  $f$  é um plano vertical.

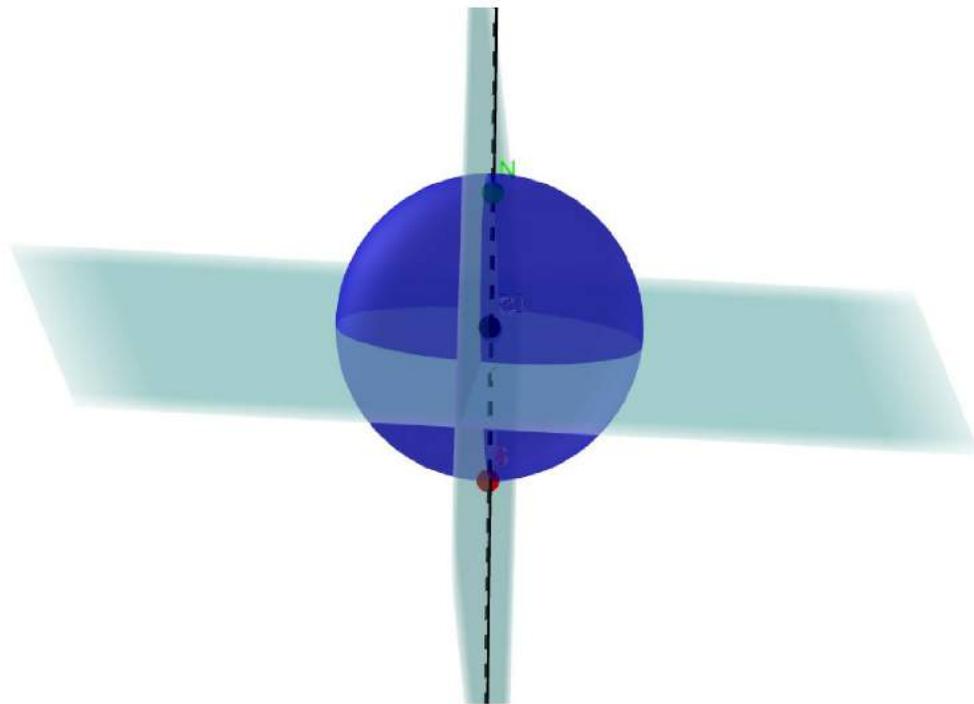


Figura 7.6: Planos horizontal e vertical .

Dado um plano horizontal ou vertical, em relação a interseção deste plano com a esfera  $\mathcal{E}(C_r(P_0))$ , classificaremos em três tipos:

- (l) vazia, quando nenhum ponto do plano é ponto da esfera, como ilustra a Figura 7.7;

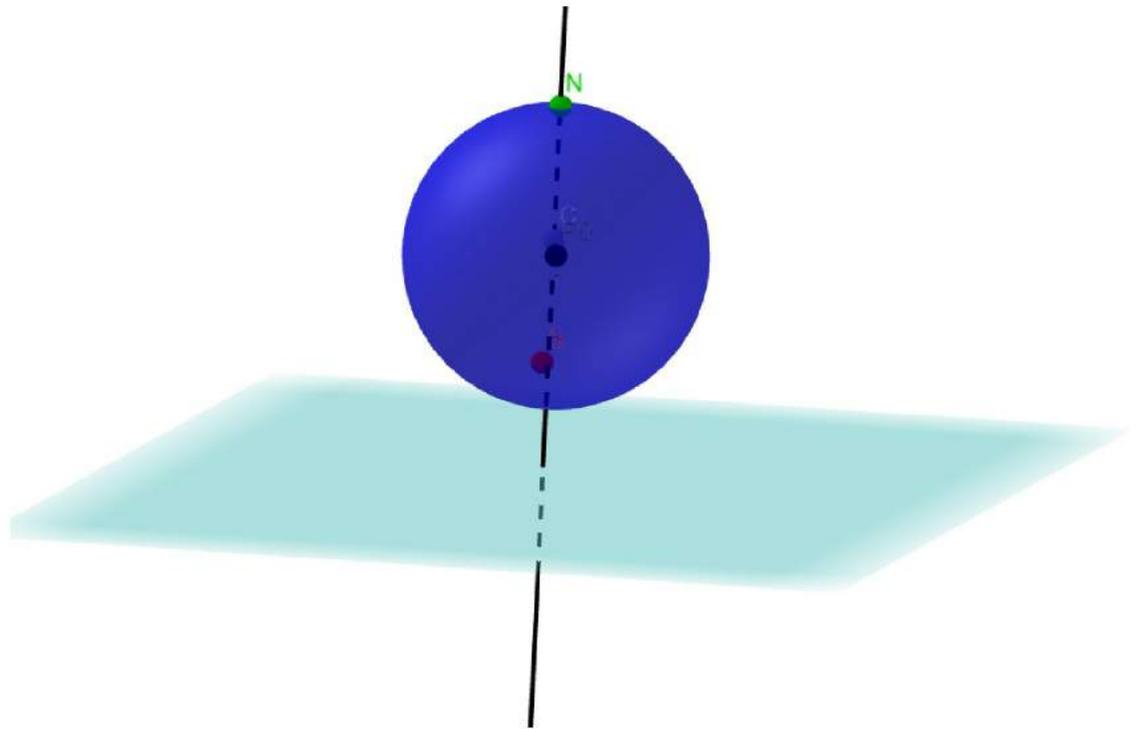


Figura 7.7: Interseção vazia .

- (II) degenerada, quando a interseção do plano com a esfera é apenas um ponto, como ilustra a Figura 7.8;

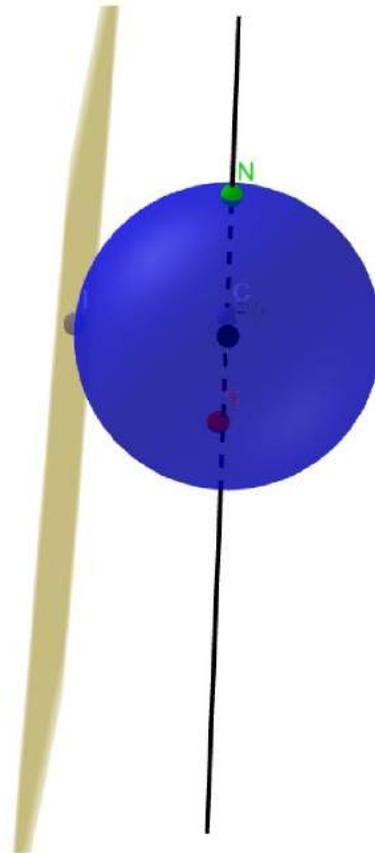


Figura 7.8: Interseção degenerada .

- (III) não-degenerada, quando a interseção do plano com a esfera é mais de um ponto, como ilustra a Figura 7.9

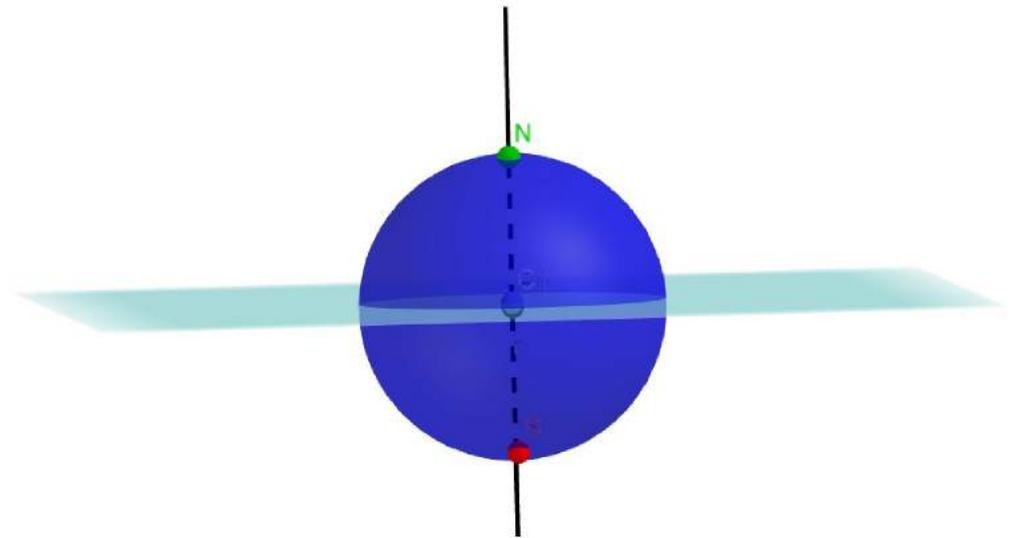


Figura 7.9: Interseção não-degenerada.

Note que a interseção, não-degenerada, da esfera  $\mathcal{E}(\mathcal{C}_r(P_0))$  com um plano, produz uma circunferência. Dado  $Q$  um ponto qualquer sobre a esfera  $\mathcal{E}(\mathcal{C}_r(P_0))$ . Se o ponto  $Q$  não é polo, e pertencem a um plano (horizontal), então este ponto pertence a uma circunferência  $\mathcal{C}_s(Q_0)$ , com  $0 < s \leq r$ . Além disso, como a circunferência pertence a um plano horizontal, então

consideramos  $z$  a interseção de uma reta  $g$ , passando por estes pontos, que seja perpendicular a reta  $f$ . Na verdade, interpretando  $z$  como a sendo a altura, em relação ao plano  $P_0XY$ , que se encontra o plano horizontal contendo a circunferência  $\mathcal{C}_s(Q_0)$ , podemos considerar a circunferência  $\mathcal{C}_s(Q_0)$  como sendo  $\mathcal{C}_s(P_0)$  a uma altura  $z$ . Aqui consideraremos  $0 < z \leq r$ , se o ponto  $Q$  estiver entre o plano  $P_0XY$  e o plano horizontal contendo o polo norte  $N$ , e consideraremos  $-r \leq z \leq 0$  caso contrário. Segue-se que ao pontos  $Q$  podemos associar uma matriz coluna

$$Q = \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix},$$

tal que  $z$  pertence a reta  $f$  e  $w$  pertence a circunferência  $\mathcal{C}_s(P_0)$ . Como os pontos de uma circunferência podem ser escritos através de uma matriz coluna, então podemos escrever o ponto  $Q$  da seguinte maneira:

$$Q = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

Se o ponto  $Q$  pertence a um plano vertical a construção é análoga.

Naturalmente, representaremos os polos através de matrizes coluna da seguinte maneira:

$$N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{bmatrix},$$

e

$$S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{bmatrix},$$

Assim, convencionaremos de modo natural o ponto  $P_0$  como sendo o centro da esfera e escreveremos a esfera de centro no ponto  $P_0$  e raio  $r > 0$ , da seguinte forma  $\mathcal{E}_r(P_0)$ .

Dados dois pontos quaisquer sobre a esfera  $\mathcal{E}(\mathcal{C}_r(P_0))$ ,  $Q_1$  e  $Q_2$ , em relação a esfera, as seguintes situações podem ocorrer:

- (A) os pontos  $Q_1$  e  $Q_2$  não são polos, e pertencem a um mesmo plano (horizontal ou vertical), então estes pontos pertencem a uma circunferência  $\mathcal{C}_s(Q_0)$ , com  $0 \leq s \leq r$ . Além disso, se a circunferência pertence a um plano horizontal, segue-se que  $Q_2 = A.(Q_1 - P_0) + P_0$  tal que a matriz  $A$  satisfaz  $A.A^T = I$  e é dada por

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

onde

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

é a matriz ortogonal associada a  $w_1$  e  $w_2$ . No caso em que os pontos pertencem a um plano vertical, obtemos que a matriz  $A$  satisfaz  $A.A^T = I$  e é dada por

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ c & d & 0 \end{bmatrix},$$

onde

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

é a matriz ortogonal associada a  $w_1$  e  $w_2$ .

- (B) os pontos  $Q_1$  e  $Q_2$  não são polos, e não pertencem a um mesmo plano (horizontal ou vertical). Neste caso, obtemos dois planos perpendiculares de interseção não-degenerada com a esfera, passando pelos pontos  $Q_1$  e  $Q_2$ , respectivamente, tal que o ponto  $Q \in \mathcal{E}_r(P_0)$  seja ponto de interseção entre os planos perpendiculares e a esfera.

Suponhamos que passando pelo ponto  $Q_1$  tenhamos um plano horizontal e pelo ponto  $Q_2$  tenhamos um plano vertical, como ilustra a Figura 7.10

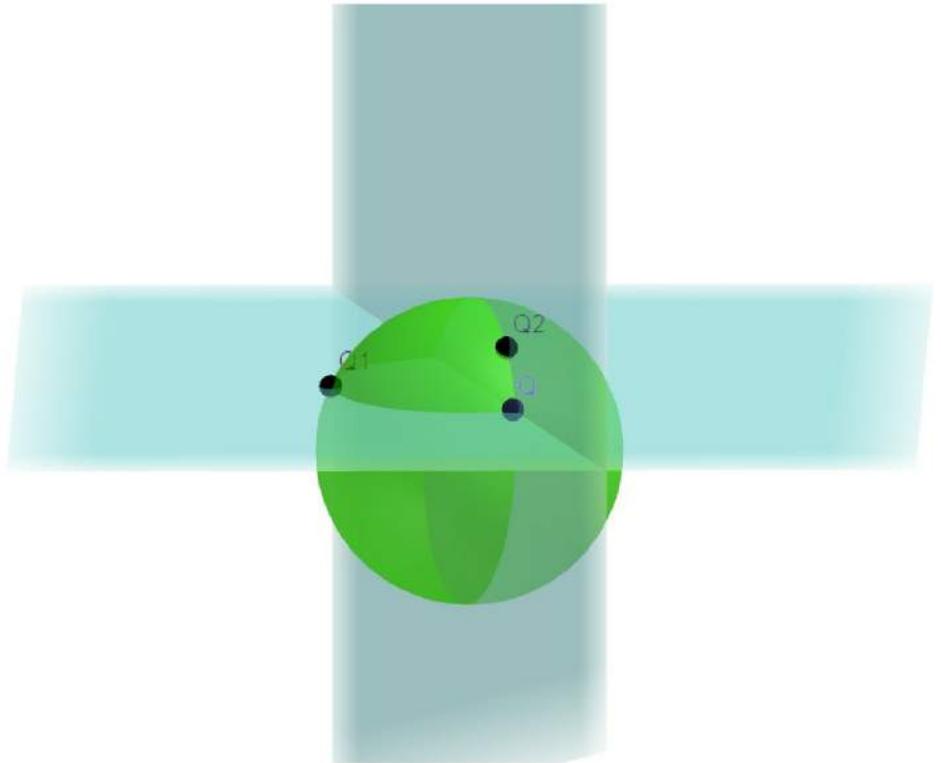


Figura 7.10: Ponto  $Q_1$  em um plano horizontal e  $Q_2$  vertical .

Em relação aos pontos  $Q_1$  e  $Q$ , adotando a mesma notação do item anterior, segue-se que  $Q = A \cdot (Q_1 - P_0) + P_0$  tal que  $AA^T = I$ .

Em relação aos pontos  $Q_2$  e  $Q$ , temos que  $Q_2 = B(Q - P_0) + P_0$  tal que  $B \cdot B^T = I$ .

Segue-se que

$$Q_2 = B \cdot (A \cdot Q_1 - P_0) + P_0$$

tal que  $A \cdot A^T = I$  e  $B \cdot B^T = I$  são dadas no item anterior;

- (C) os pontos  $Q_1$  e  $Q_2$  são polos da esfera. Neste caso, estes pontos pertencem a uma circunferência  $\mathcal{C}_r(Q_0)$ , com  $r > 0$ . Segue-se que  $Q_2 = A \cdot (Q_1 - P_0) + P_0$  tal que  $A \cdot A^T = I$ .

Em ambos os casos, obtemos que a esfera  $\mathcal{E}_r(P_0)$  é dada através de operações com matrizes. Ou seja, conhecendo-se um ponto sobre a esfera através de operações com matrizes ortogonais conseguimos determinar toda a esfera.

### Observação

Quando a semicircunferência que origina uma esfera tiver o seu centro na origem e raio  $r > 0$ , denotaremos a esfera simplesmente por  $\mathcal{E}_r$  e nos referimos apenas como uma esfera de raio  $r$ , ou simplesmente uma esfera pragmática de raio  $r > 0$ . Estas são as esferas que devemos considerar quando queremos trabalhar, de modo pragmático, com esferas de raio  $r > 0$ .

Partindo da observação acima podemos concluir que a esfera  $\mathcal{E}_r$  é dada da seguinte maneira:

$$\mathcal{E}_r = \{A \cdot Q_0 : A \cdot A^T = I_3\}, \tag{7.1}$$

onde  $Q_0$  é um ponto fixado sobre  $\mathcal{E}_r$ . Uma esfera como a construída em 7.1, será chamada de esfera pragmática de raio  $r > 0$ . Em particular, podemos

considerar  $Q_0 = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  e assim obter:

$$\mathcal{E}_r = \left\{ \left[ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}. \tag{7.2}$$

**Exemplo 7.1:**

A esfera de raio 1 é dada por

$$\mathcal{E}_1 = \left\{ \left[ \begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : \left[ \begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

**Exemplo 7.2:**

A esfera de raio 4 é dada por

$$\mathcal{E}_4 = \left\{ \left[ \begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : \left[ \begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

**Observação**

Note que cada ponto  $Q = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$  pertencente a uma esfera de raio  $r > 0$  é dado por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Donde  $Q = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$  é tal que  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ . Portanto, obtemos que

$$\mathcal{E}_r = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \right\}.$$

Assim, dada uma matriz  $Q = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$  tal que  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ , identificamos de imediato que esta matriz representa um ponto sobre uma circunferência  $\mathcal{E}_r$ , como ilustra a Figura 7.11.

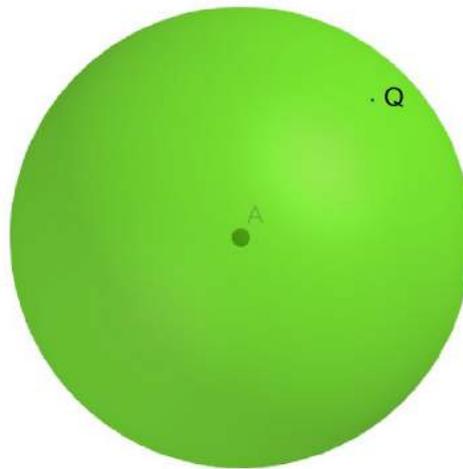


Figura 7.11: Esfera .

Para uma melhor representação desta matriz sobre a esfera, recordamos que a um ponto sobre uma esfera associamos um plano horizontal ou

vertical e uma marcação sobre o segmento de reta que determina o raio  $r > 0$ . Ou seja, olhamos para a matriz coluna  $Q$  e analisamos se a matriz  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  pertence a uma circunferência (sobre um plano horizontal) centrada na origem com raio  $r^2 - z^2$ , e altura  $-r \leq z \leq r$ , como ilustra a Figura 7.12

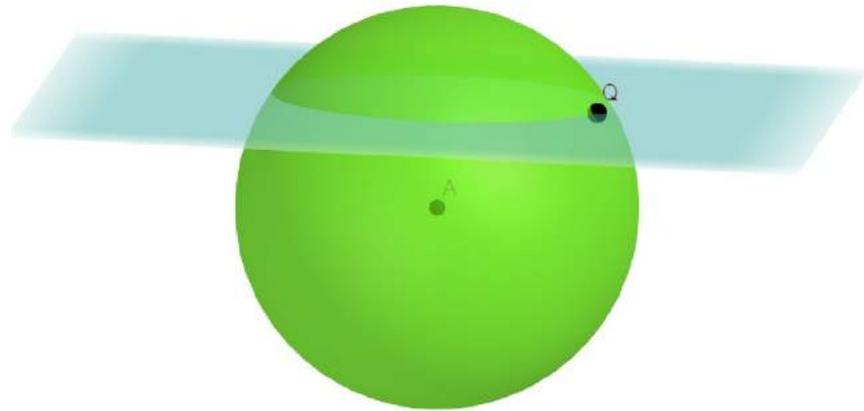


Figura 7.12: Esfera .

ou se a matriz  $\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$  pertence a uma circunferência (sobre um plano

vertical que toca o eixo de rotação em  $-r \leq y \leq r$ ) centrada na origem com raio  $r^2 - y^2$ , como ilustra a Figura 7.13.

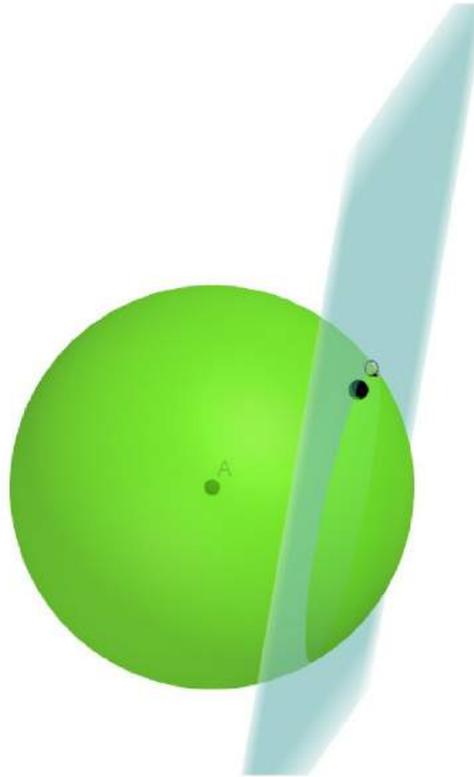


Figura 7.13: Esfera .

**Exemplo 7.3:**

A esfera de raio 3 é dada por

$$\mathcal{E}_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : x^2 + y^2 + z^2 = 9 \right\}.$$

As matrizes  $Q_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$  e  $Q_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$  pertencem a esfera  $\mathcal{E}_3$ , como

ilustra a Figura 7.14.

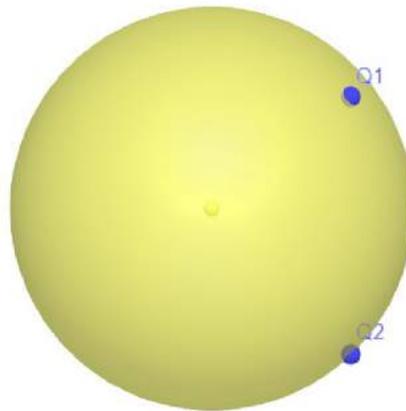


Figura 7.14: Esfera de raio 3 .

Note que olhando para a matriz  $Q_1$ , temos que a matriz coluna  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  pertence a uma circunferência de centro na origem e raio  $\sqrt{5}$  que está a uma altura 2 e olhando para a matriz  $Q_2$ , temos que a matriz coluna  $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$  pertence a uma circunferência de centro na origem e raio  $\sqrt{5}$  que está a uma altura  $-2$ .

---

Note que as calotas não podem ser escritas, através da equação (7.1), como um produto de matrizes. Pois, podemos escolher uma matriz coluna

em um dos polos e obter uma matriz ortogonal tal que quando fazemos o produto entre estas duas matrizes obtemos uma matriz coluna no outro polo, o exemplo a seguir ilustra bem esta situação.

**Exemplo 7.4:**

Seja a esfera  $\mathcal{E}_1$ , consideramos o ponto  $Q_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$  sobre a calota polar norte, como ilustra a Figura 7.15.

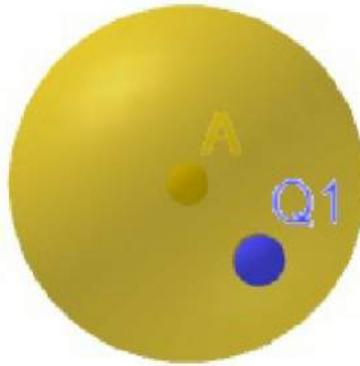


Figura 7.15: Ponto  $Q_1$  sobre a calota polar sul .

através do produto de matrizes

$$\begin{bmatrix} x & \sqrt{1-x^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{1-x^2} & -x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix},$$

com  $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq 1$  obtemos um ponto  $Q_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$  que pertence a calota polar norte, como ilustra a Figura 7.16.

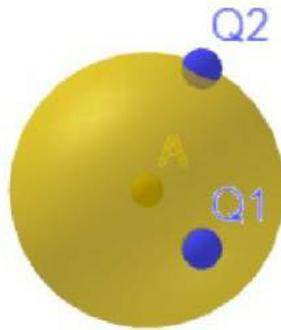


Figura 7.16: Pontos  $Q_1$  e  $Q_2$  sobre a esfera de raio 1.

Embora não seja possível escrever as calotas polares através da equação 7.1, ainda podemos escrevê-las utilizando operações com matrizes. Dada uma esfera  $\mathcal{E}_r$ , denotaremos a calota polar norte por  $\mathcal{E}_r^N$  e a calota polar sul por  $\mathcal{E}_r^S$ .

Consideremos a calota polar norte  $\mathcal{E}_r^N$ , como ilustra a Figura 7.17.



Figura 7.17: Calota polar norte.

Dados dois pontos  $Q_1$  e  $Q_2$  pertencentes a  $\mathcal{E}_r^N$ , as seguintes situações podem ocorrer:

- (a)  $Q_1$  e  $Q_2$  pertencem a um mesmo paralelo, como ilustra a Figura 7.18.



Figura 7.18: Os pontos  $Q_1$  e  $Q_2$  pertencem a um mesmo paralelo.

Neste caso, é imediato que existe uma matriz ortogonal  $A$  tal que  $Q_2 = AQ_1$ ;

- (b)  $Q_1$  e  $Q_2$  pertencem a um mesmo meridiano, como ilustra a Figura 7.19.

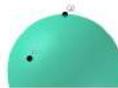


Figura 7.19: Os pontos  $Q_1$  e  $Q_2$  pertencem a um mesmo meridiano.

Neste caso, é imediato que existe uma matriz ortogonal  $A$  tal que  $Q_2 = AQ_1$ ;

- (c)  $Q_1$  pertence a um paralelo  $\gamma$  e  $Q_2$  pertencem a um meridiano  $\delta$ , como ilustra a Figura (7.20).



Figura 7.20: O ponto  $Q_1$  pertence a um paralelo e o ponto  $Q_2$  pertencem a um meridiano.

Neste caso, seja  $Q$  um ponto de interseção entre o paralelo  $\gamma$  e o meridiano  $\delta$ . Temos que existe uma matriz ortogonal  $A$  tal que  $Q = AQ_1$  e uma matriz ortogonal  $B$  tal que  $Q_2 = BQ$ , segue-se que  $Q_2 = BAQ_1$ .

Portanto, podemos concluir que podemos cobrir toda a calota polar norte através de operações com matrizes ortogonais.

## 7.2 Cilindros Escritos através de operações com matrizes

Determinaremos uma maneira de escrever um cilindro utilizando operações com matrizes.

A partir da definição de circunferência no plano, será desenvolvido uma maneira de representar cilindros. Para isso, seja  $\mathcal{C}_r(P_0)$  uma circunferência com centro em um ponto  $P_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$  e raio  $r > 0$ , e seja  $\mathcal{L}$  uma reta que intersecta o plano que contém a circunferência (7.21) em apenas um ponto, o conjunto de todas as retas paralelas a  $\mathcal{L}$  que intersectam  $\mathcal{C}_r(P_0)$  chama-se cilindro. Denotaremos tal cilindro por  $\mathcal{C}_r(P_0, \mathcal{L})$ , como ilustra a figura 7.22. A circunferência  $\mathcal{C}_r(P_0)$  chama-se diretriz do cilindro e cada reta que passa por  $\mathcal{C}_r(P_0)$  paralela a  $\mathcal{L}$  chama-se geratriz do cilindro.

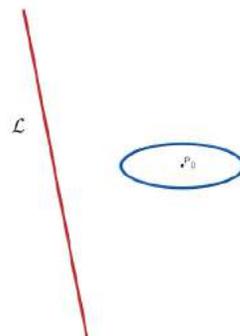


Figura 7.21: circunferência  $\mathcal{C}_r(P_0)$  e reta  $\mathcal{L}$

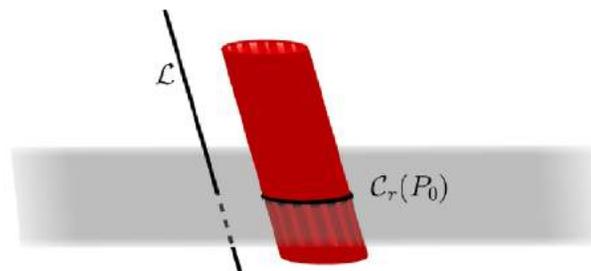


Figura 7.22: Cilindro  $\mathcal{C}_r(P_0, \mathcal{L})$  cuja reta geratriz é  $\mathcal{L}$

Considerando que a reta geratriz  $\mathcal{L}$  é perpendicular ao plano que contém  $\mathcal{C}_r(P_0)$ , como ilustrado em 7.23.

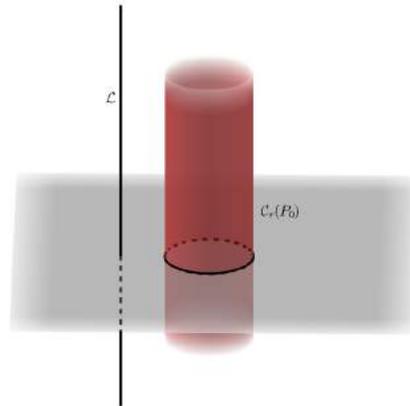


Figura 7.23: Cilindro com diretriz  $\mathcal{C}_r(P_0)$  e reta geratriz  $\mathcal{L}$  perpendicular ao plano que contém a diretriz  $\mathcal{C}_r(P_0)$

Cada ponto  $Q$  pertencente ao cilindro  $\mathcal{C}_r(P_0, \mathcal{L})$  é um ponto sobre uma geratriz, sendo assim, o ponto  $Q$  é um ponto sobre um plano horizontal e pode ser representado por uma matriz coluna  $Q = \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix}$ , tal que  $z$  pertence a reta  $\mathcal{L}$  e  $w$  pertence a circunferência  $\mathcal{C}_r(P_0)$  (aqui para obtermos a tal representação consideramos o plano horizontal que contém o ponto  $Q$  e intersecta a reta  $\mathcal{L}$  em  $z$  e a reta geratriz que intersecta  $Q$  e a circunferência  $\mathcal{C}_r(P_0)$  no ponto  $w$ .)

ou seja, obtemos uma representação, como ilustra a figura 7.24).

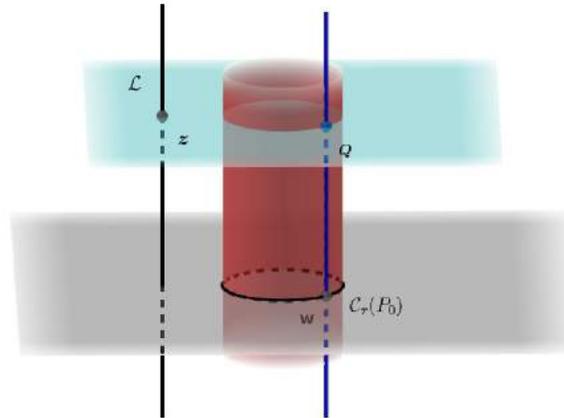


Figura 7.24: A reta azul, também é uma geratriz, passa

Como os pontos sobre uma circunferência podem ser representados por matrizes, então podemos considerar  $w = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ . Segue-se que cada ponto sobre uma circunferência é dado da seguinte maneira

$$Q = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

tal que  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  é um ponto sobre a circunferência  $C_r(P_0)$ . A recíproca é imediata, portanto um cilindro  $C_r(P_0, \mathcal{L})$  com diretriz  $C_r(P_0)$  e geratriz  $\mathcal{L}$  é dado da seguinte maneira:

$$C_r(P_0, \mathcal{L}) = \left\{ Q = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in C_r(P_0) \text{ e } z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Como cada ponto  $W = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  sobre a circunferência  $C_r(P_0)$  pode ser escrita da seguinte maneira

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix},$$

tal que  $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_r(P_0)$  e  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  é uma matriz ortogonal, segue-se

$$\mathcal{C}_r(P_0, \mathcal{L}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}. \quad (7)$$

**Exemplo 7.5:**

Usando operações com matrizes represente o cilindro cuja circunferência diretriz tem raio 3 e centro  $P_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ .

Veja que  $P_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ \sqrt{5} \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_r(P_0)$ . Sabemos que um cilindro pode ser representado pelo conjunto (7.3). Daí,

$$\mathcal{C}_3(P_0, \mathcal{L}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{bmatrix} 2 \\ \sqrt{5} \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Em particular, quando as geratrizes são segmentos de reta de comprimento  $t$ , com uma das extremidades sobre a circunferência  $\mathcal{C}_r(P_0)$ , dizemos que  $\mathcal{C}_r(P_0, t)$  é um cilindro sobre a circunferência  $\mathcal{C}_r(P_0)$  e altura  $t$ .

Pragmaticamente, podemos trabalhar com cilindros cuja a base é uma circunferência centrada na origem e raio  $r > 0$ , e a geratriz é um intervalo de comprimento  $h$ . Neste caso, chamaremos a geratriz de altura e denotaremos o cilindro por  $\mathcal{C}_r(h)$ , este cilindro é chamado de cilindro circular reto de altura  $h$  e raio  $r > 0$ , ou simplesmente cilindro pragmático de altura  $h$  e raio  $r > 0$ ;  $\mathcal{C}_r(h)$  pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\mathcal{C}_r(h) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ z \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 0 \leq z \leq h \right\}. \quad (7.4)$$

Assim, todo ponto  $P$  sobre um cilindro  $\mathcal{C}_r(h)$  é uma matriz coluna dada por:

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

tal que  $x^2 + y^2 = r^2$ , e  $0 \leq z \leq h$ .

**Exemplo 7.6:**

O cilindro de altura 3 e raio 2, como ilustra a Figura 7.25 é dado através de matrizes da seguinte maneira:

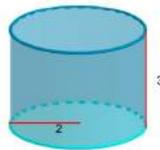


Figura 7.25: Cilindro de altura 3 e raio 2 .

$$\mathcal{C}_2(3) = \left\{ \left[ \begin{array}{ccc} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ z \end{array} \right] : \left[ \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{cc} a & c \\ b & d \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \quad 0 \leq z \leq 3 \right\}.$$

Os pontos sobre o cilindro são matrizes coluna da forma:

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

tal que  $x^2 + y^2 = 4$ , e  $0 \leq z \leq 3$ . Em particular, a matriz coluna

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

é um ponto sobre o cilindro  $\mathcal{C}_2(3)$ .

**Exemplo 7.7:**

Determine o cilindro de altura 3 sobre a circunferência  $\mathcal{C}_1(O)$ .

*Solução.* Seguindo o modelo acima  $0 \leq z \leq 3$ ,  $r = 1$ . Com isso,

$$\mathcal{C}_1(3) = \left\{ \left[ \begin{array}{ccc} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ z \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } 0 \leq z \leq 3 \right\}$$

Geometricamente obtemos (7.26)

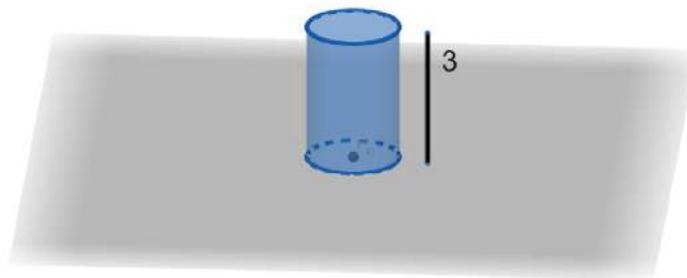


Figura 7.26: Cilindro de raio 1 e altura 3

## 7.3 Cones Escritos Através de Operações com Matrizes

Encerraremos este capítulo, apresentando uma maneira de representar um cone através de operações com matrizes.

Seja  $\mathcal{C}_r(P_0)$  uma circunferência com centro em um ponto  $P_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$  e raio  $r > 0$ , o conjunto todas as semirretas partindo de um determinado ponto  $P$  (que não pertence ao mesmo plano que  $\mathcal{C}_r(P_0)$ ), e que passam pela circunferência  $\mathcal{C}_r(P_0)$  chama-se cone. Denotaremos tal cone por  $\mathcal{T}_r(P_0)$ . A circunferência  $\mathcal{C}_r(P_0)$ , chama-se diretriz do cone e cada reta que passa por  $P$  e  $\mathcal{C}_r(P_0)$  chama-se geratriz do cone, como ilustra a figura 7.27.

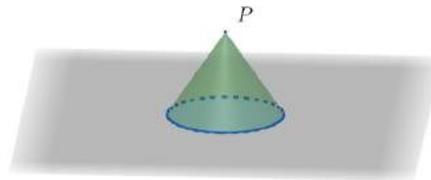


Figura 7.27: Cone

No caso em que a reta formada por  $P$  e  $P_0$  é perpendicular ao plano que contém  $\mathcal{C}_r(P_0)$ , temos um cone, chamado **cone reto**, para representação por matrizes consideraremos esse caso.

Como cada ponto  $Q$  pertencente ao cone  $\mathcal{T}_r(P_0)$  é um ponto sobre uma geratriz, podemos considerar o ponto  $Q$  pertence a um cilindro  $\mathcal{C}_s(P_0, \mathcal{L})$  cuja as geratrizes são paralelas ao segmento de reta ligando  $P$  ao ponto  $P_0$ , como ilustra a figura 7.28.

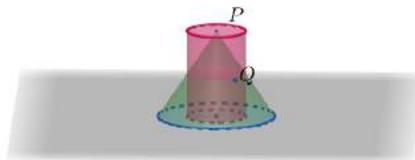


Figura 7.28: Cone

Partindo do cone  $\mathcal{T}_r(P_0)$  e do cilindro  $\mathcal{C}_s(P_0, \mathcal{L})$  como ilustra a figura

7.28, obtemos o triângulo ilustrado na figura 7.29.

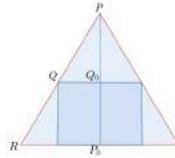


Figura 7.29: Cone

Por semelhança dos triângulos  $PRP_0$  e  $PQQ_0$ , temos que

$$\frac{r}{s} = \frac{PP_0}{PQ_0}, \quad (7.6)$$

sendo  $r$  o raio da circunferência  $\mathcal{C}_r(P_0)$  e  $s$  o raio da circunferência  $\mathcal{C}_s(Q_0)$ . Isto é,

$$s = \frac{r \cdot PQ_0}{PP_0} \quad (7.7)$$

Agora, como o ponto  $Q$  pertence ao cilindro  $\mathcal{C}_s(P_0, \mathcal{L})$  segue pela seção anterior que o ponto  $Q$  pode ser escrito da seguinte maneira:

$$Q = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

tal que  $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_s(P_0)$ ,  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  é uma matriz ortogonal. Segue-se

$$\mathcal{T}_r(P_0) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{bmatrix} : \right. \quad (7.8)$$

$$\left. \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, s = r \cdot \frac{PQ_0}{PP_0} \right\}$$

Em particular, quando  $0 \leq z \leq PP_0 = h$ , dizemos que  $\mathcal{T}_r(P_0)$  é um cone sobre a circunferência  $\mathcal{C}_r(P_0)$  e altura  $h$ .

Pragmaticamente, podemos trabalhar com cones cuja a base é uma circunferência centrada na origem e raio  $r > 0$ , e altura  $h$ . Este cone chama-se cone circular reto de altura  $h$  e raio  $r > 0$ , ou simplesmente cone pragmático de altura  $h$  e raio  $r > 0$ ; denotaremos tais cones simplesmente por  $\mathcal{T}_r(h)$ , sabendo que  $\frac{s}{r} = \frac{PQ_0}{PP_0}$  e  $z = Q_0P_0$ , como  $PP_0 = h$  então  $\frac{s}{r} = \frac{h-z}{h}$ . Sendo assim, representamos o cone da seguinte maneira:

$$\mathcal{T}_r(h) = \left\{ \left[ \begin{array}{ccc} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c} s \\ 0 \\ z \end{array} \right] : \left[ \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{cc} a & c \\ b & d \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \quad s = r \cdot \frac{h-z}{h} \text{ e } 0 \leq z \leq h \right\}. \quad (7.9)$$

Assim, todo ponto  $Q$  sobre um cone  $\mathcal{T}(h, r)$  é uma matriz coluna dada por:

$$Q = \left[ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right] : \quad x^2 + y^2 = s^2, \quad s = r \cdot \frac{h-z}{h}. \quad (7.10)$$

**Exemplo 7.8:**

O cilindro de altura 3 e raio 2, como ilustra a Figura 7.30 é dado através de matrizes da seguinte maneira:

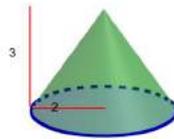


Figura 7.30: Cilindro de altura 3 e raio 2 .

$$\mathcal{T}(3,2) = \left\{ \left[ \begin{array}{ccc} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c} s \\ 0 \\ z \end{array} \right] : \left[ \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{cc} a & c \\ b & d \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \quad s = \frac{6-2z}{3} \text{ e } 0 \leq z \leq 3 \right\}.$$

Os pontos sobre o cone são matrizes coluna da forma:

$$P = \left[ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right] : \quad x^2 + y^2 = s^2, \quad s = \frac{6-2z}{3}.$$

Ou seja,

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : x^2 + y^2 = \frac{(6 - 2z)^2}{9}.$$

Em particular, a matriz coluna

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

é um ponto sobre o cone  $\mathcal{T}(3, 2)$ .

---

# 8. Pragmatismo

Este capítulo é dedicado às aplicações da teoria estudada nos capítulos anteriores. Utilizaremos como aplicação situações pragmáticas, como o planejamento da rota percorrida por um veículo autônomo, o plano de voo de uma aeronave e o reconhecimento de um objeto no processo de scanner 3d.

## 8.1 Planejando a Rota de Um Veículo Autônomo

Nesta seção aplicaremos os resultados apresentados no capítulo 6. Como aplicação, introduziremos a noção de deslocamento de pontos ao longo de uma circunferência  $C_r(P_0)$ , onde  $P_0$  é um ponto qualquer; esta ideia de deslocamento de pontos foi inicialmente apresentada nos trabalhos de Oliveira e Souza em [6] – [7], posteriormente de Aguiar e Souza em seus trabalhos [2] – [3] melhoraram esta noção de deslocamento utilizando operações com matrizes. Como consequência, utilizaremos operações de matrizes para encontrar a trajetória descrita por veículos autônomos (robôs), se deslocando entre dadas posições na presença de obstáculos. Isto é, estudaremos a trajetória descrita por um robô móvel no plano.

Robôs móveis, estão cada vez mais presentes, realizando tarefas de transportes de peças, inspeção de plataforma de perfuração de petróleo, monitoramento, mapeamento, vigilância e etc... A principal característica de um robô móvel é a sua capacidade de locomoção, feita de modo autônomo, em determinado ambiente.

Um problema clássico em navegação autônoma de robôs, é fazer com que o robô navegue pelo ambiente em segurança, evitando a colisão com obstáculos, até alcançar uma ou mais posições pré-estabelecidas no ambiente. Uma proposta para o problema de navegação autônoma de robôs é dividir a navegação em quatro etapas: mapeamento do ambiente, planejamento, geração e controle da trajetória.

Na etapa de mapeamento do ambiente, analisamos o ambiente identificando os objetos nele contidos e suas respectivas localizações. A etapa de planejamento de trajetória, é onde se define uma trajetória segundo algum critério, como por exemplo, o menor caminho entre a posição de origem e a posição de destino, passando por posições intermediária que não tenha obstáculos. Para mais detalhes sobre estas duas etapas anteriores, sugiro as referências [8] e [10]. Após o planejamento, a trajetória deve ser construída, onde entra a etapa de geração de trajetória. Esta etapa, constitui-se basicamente em encontrar argumentos matemáticos, como por exemplo, funções ou conjuntos de funções, que constitua com fidelidade a trajetória planejada. O grande problema desta etapa, é encontrar estes argumentos matemáticos. A geração de trajetória, constrói um caminho que deve ser rastreado e seguido pelo robô. Na etapa de controle de trajetória, corresponde em fazer o robô rastrear e seguir este caminho. Para mais detalhes sobre a etapa de controle, consulte a referência [9].

Nos concentraremos apenas na etapa de geração de trajetória. Onde através de operações com matrizes determinaremos caminhos que o robô irá rastrear e seguir na etapa de controle de trajetória.

Para isto, note que os pontos de uma circunferência de centro na origem e raio  $r > 0$ , podem ser representados por um produto de matrizes. Desta forma, partindo do ponto  $P_0 = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$ , podemos percorrer toda a circunferência  $\mathcal{C}_r$ , da seguinte maneira: seja  $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  um ponto arbitrário sobre  $\mathcal{C}_r$ , pela Proposição 6.2 existe uma matriz ortogonal

$$A = \begin{bmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} \\ \frac{y}{r} & -\frac{x}{r} \end{bmatrix},$$

tal que  $P = A.P_0$ . Como  $P \in \mathcal{C}$ , temos que  $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ . Dessa forma, para todo  $r > x \geq -r$  obtemos que o ponto  $P$  percorre todo o arco com extremidades nos pontos  $P_0$  e  $-P_0$  no sentido anti-horário através do produto da matriz

$$A = \begin{bmatrix} \frac{x}{r} & \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r} \\ \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r} & -\frac{x}{r} \end{bmatrix},$$

com o ponto  $P_0$ , com ilustra a Figura 8.1.

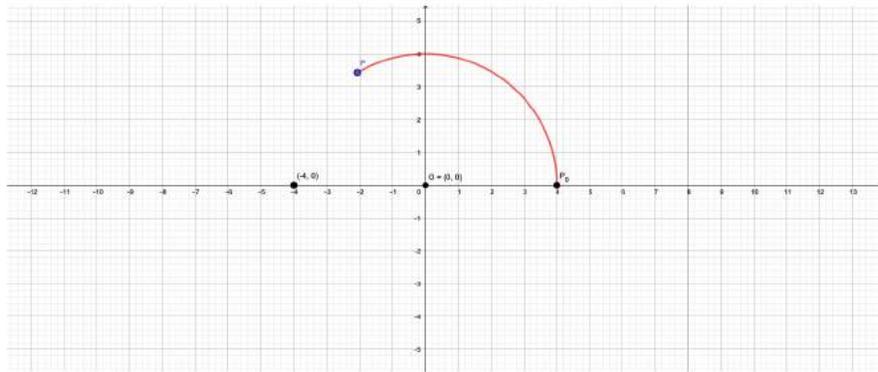


Figura 8.1: O deslocamento do ponto  $P$  ao longo de  $C_r$  partindo de  $P_0$ .

Continuando o processo acima, para todo  $-r < x \leq r$  obtemos que o ponto  $P$  percorre todo o arco com extremidades nos pontos  $-P_0$  e  $P_0$  no sentido anti-horário através do produto da matriz

$$A = \begin{bmatrix} \frac{x}{r} & \frac{-\sqrt{r^2 - x^2}}{r} \\ \frac{-\sqrt{r^2 - x^2}}{r} & -\frac{x}{r} \end{bmatrix},$$

com o ponto  $P_0$ , como ilustra a Figura 8.2.

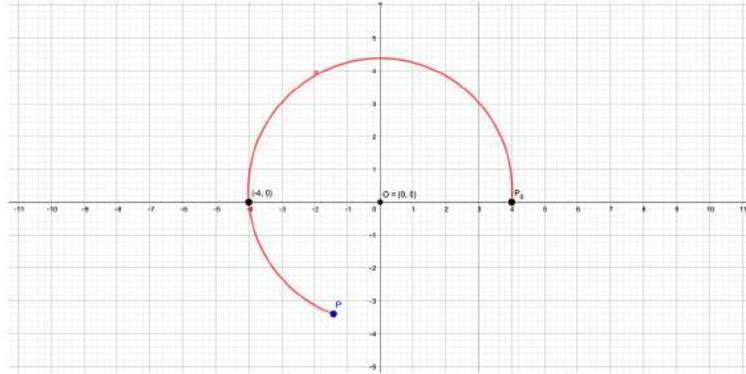


Figura 8.2: Continuação do deslocamento do ponto  $P$  ao longo de  $\mathcal{C}_r$  partindo de  $P_0$ .

Em ambos os casos,  $P = A \cdot P_0$  representa a posição do ponto  $P$  sobre a circunferência  $\mathcal{C}_r$ . Isto significa que podemos nos deslocar do ponto  $P_0 = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$ , até um ponto qualquer  $P_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ , ao longo da circunferência  $\mathcal{C}_r$  utilizando apenas o produto de matrizes ortogonais pelo ponto  $P_0$ . Isto é, se  $P_1$  pertence ao arco de extremidades  $P_0$  e  $-P_0$ , então

$$P = \begin{bmatrix} \frac{x}{r} & \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r} \\ \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r} & -\frac{x}{r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (8.1)$$

com  $r > x \geq x_1$  representa a posição do ponto  $P$ , ao longo da circunferência  $\mathcal{C}_r$ , sobre o arco de extremidades  $P_0$  e  $P_1$ , no sentido anti-horário.

Caso  $P_1$  pertença ao arco de extremidades  $-P_0$  e  $P_0$ , então o ponto dado pela equação (8.1) representa a posição do ponto  $P$ , ao longo de  $\mathcal{C}_r$ , sobre o arco de extremidades  $P_0$  e  $-P_0$  e por sua vez

$$P = \begin{bmatrix} \frac{x}{r} & \frac{-\sqrt{r^2 - x^2}}{r} \\ \frac{-\sqrt{r^2 - x^2}}{r} & -\frac{x}{r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix},$$

com  $-r < x \leq x_1$  representa a posição do ponto  $P$ , ao longo da circunferência  $\mathcal{C}_r$ , sobre o arco de extremidades  $P_0$  e  $P_1$ , no sentido anti-horário. O deslocamento no sentido horário é feito de modo análogo. Para ilustrar o que foi feito acima faremos alguns exemplos.

**Exemplo 8.1:**

Seja  $P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  um ponto sobre uma circunferência de centro na origem e raio 1. Temos que  $P_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$  é dado pelo produto  $P_2 = A.P_1$ , onde

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

é uma matriz ortogonal. Assim, os pontos

$$P = \begin{bmatrix} x & \sqrt{1-x^2} \\ \sqrt{1-x^2} & -x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

com  $x$  variando de 1 até  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , representam todas as posições ao longo de  $\mathcal{C}_1$ , sobre o arco de extremidades  $P_1$  e  $P_2$  no sentido anti-horário.

Desta forma, o produto de matrizes  $P_2 = AP_1$  implica, pela noção de deslocamento descrita acima, que percorremos todo o arco com extremidades  $P_1$  e  $P_2$  no sentido anti-horário, como ilustra a Figura 8.3.

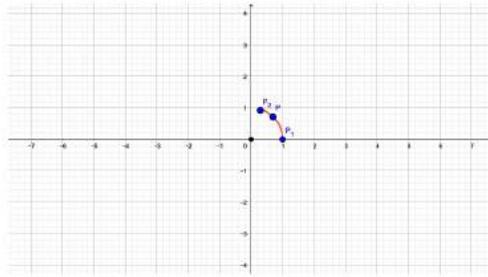


Figura 8.3: Interpretação geométrica para o produto de matrizes  $A.P_1$ .

**Exemplo 8.2:**

Seja  $P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  um ponto sobre uma circunferência de centro na origem e raio 1. Temos que  $P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$  é dado pelo produto  $P_2 = A.P_1$ , onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

é uma matriz ortogonal. Assim, os pontos

$$P = \begin{bmatrix} x & \sqrt{1-x^2} \\ \sqrt{1-x^2} & -x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

com  $x$  variando de 1 até -1, representam todas as posições ao longo de  $\mathcal{C}_1$ , sobre o arco de extremidades  $P_1$  e  $-P_1$  no sentido anti-horário. Por outro lado, os pontos

$$P = \begin{bmatrix} x & -\sqrt{1-x^2} \\ -\sqrt{1-x^2} & -x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

com  $x$  variando de -1 até 0, representam todas as posições ao longo de  $\mathcal{C}_1$ , sobre o arco de extremidades  $-P_1$  e  $P_2$  no sentido anti-horário.

Desta forma, o produto de matrizes  $P_2 = AP_1$  implica, pela noção de

deslocamento descrita acima, que percorremos todo o arco com extremidades  $P_1$  e  $P_2$  no sentido anti-horário, como ilustra a Figura 8.4.

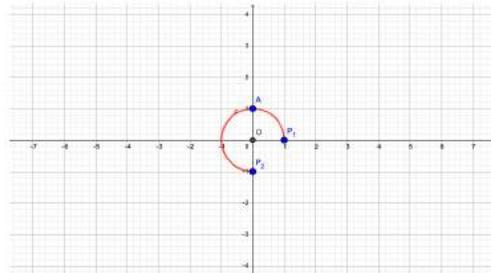


Figura 8.4: Interpretação geométrica para o produto de matrizes  $A.P_1$ .

Utilizando a noção de deslocamento sobre uma circunferência apresentada acima, podemos estudar navegação de robôs autônomos.

Considere, por exemplo, um robô omnidirecional, isto é, robôs que usam rodas com rolamentos sobre a sua superfície de contato, como ilustra a Figura 8.5:

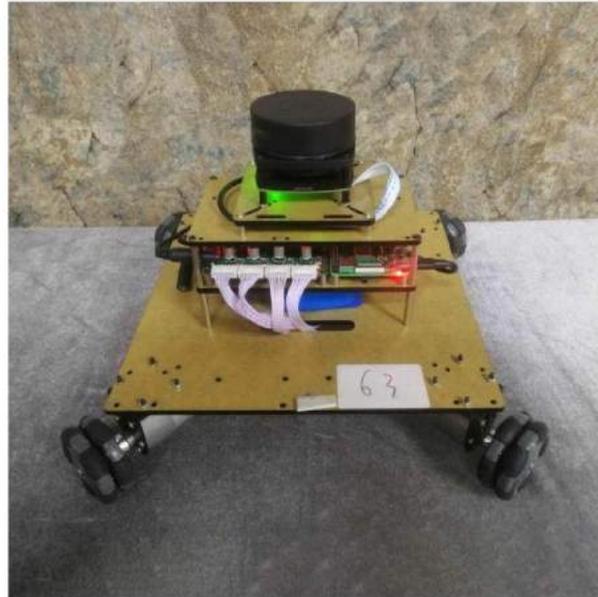


Figura 8.5: Robô omnidirecional.

Fonte: <https://m.pt.aliexpress.com/item/4000238285160.html>.

Suponhamos um robô omnidirecional, possuindo restrições no seu movimento, com 1 metro de largura por 1 metro de comprimento e 0,5 metros de altura, em uma obra de transformação de uma antiga casa de 144 metros quadrados, em um galpão. Na obra ainda restam duas paredes da casa an-

tiga, sendo que a maior delas tem 4,45 metros e a parede menor tem 2,83 metros. Considerando um plano  $\pi$ , as duas paredes se interceptam na origem do plano formando um ângulo de  $90^\circ$ ; sobre o eixo vertical encontra-se as escavações, medindo 3 metros de comprimento a partir da origem, das futuras instalações do sistema de esgoto. Além disso, a 5 metros da origem, sobre o eixo vertical está localizado um banheiro de uso coletivo dos funcionários da obra. O robô irá trabalhar dentro da obra, se deslocando no plano com velocidade baixa e constante. A medida que o robô se mova ao longo do plano, cada posição  $P$  pode ser representada por uma matriz coluna  $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ . Consideremos um robô com posição inicial  $P_0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ , queremos que este robô se desloque ao longo do plano até uma posição final  $P_f = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}$ , como ilustra a Figura 8.6:

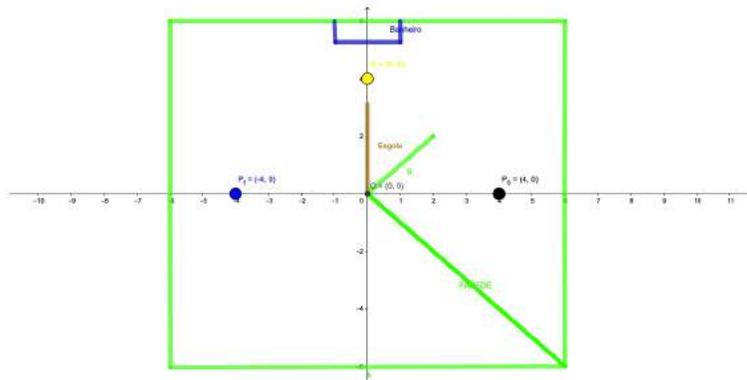


Figura 8.6: Obstáculos para a trajetória de um Robô .

O robô não pode se deslocar em linha reta, pois se traçarmos um seguimento de reta entre as posições  $P_0$  e  $P_f$  encontraremos como obstáculo uma parede de concreto, muito menos se deslocar através de vários segmentos de reta, pois devido a sua restrição de movimento, uma possível trajetória por composição de segmentos de retas ficaria muito longa, o que ocasionaria desperdício de energia. Poderíamos tentar uma trajetória descrita pelo gráfico de uma função polinomial de grau dois, porém devido as suas dimensões, o robô terá que passar pelo ponto  $Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$  e em uma

trajetória descrita por uma função polinomial de grau dois passando pelos pontos  $P_0$ ,  $Q$  e  $P_f$ , o robô acabaria tocando a parede de menor comprimento. Portanto, esta trajetória também está descartada.

Como  $P_f = A.P_0$ , onde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

é uma matriz ortogonal, então considerando todas as posições descritas por:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{x}{4} & \frac{\sqrt{16-x^2}}{4} \\ \frac{\sqrt{16-x^2}}{4} & -\frac{x}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (8.2)$$

com  $4 > x \geq -4$ , podemos percorrer uma trajetória partindo do ponto  $P_0$  até o ponto  $P_f$ , ao longo de uma circunferência centrada na origem e raio 4 metros, no sentido anti-horário. Através dessa trajetória conseguimos desviar dos obstáculos, como ilustra a Figura 8.7

Portanto, a trajetória escolhida para o deslocamento do robô da posição inicial  $P_0$  até a posição final  $P_f$  é dada através do produto de matrizes pela equação (8.2), como ilustra a Figura 8.7.

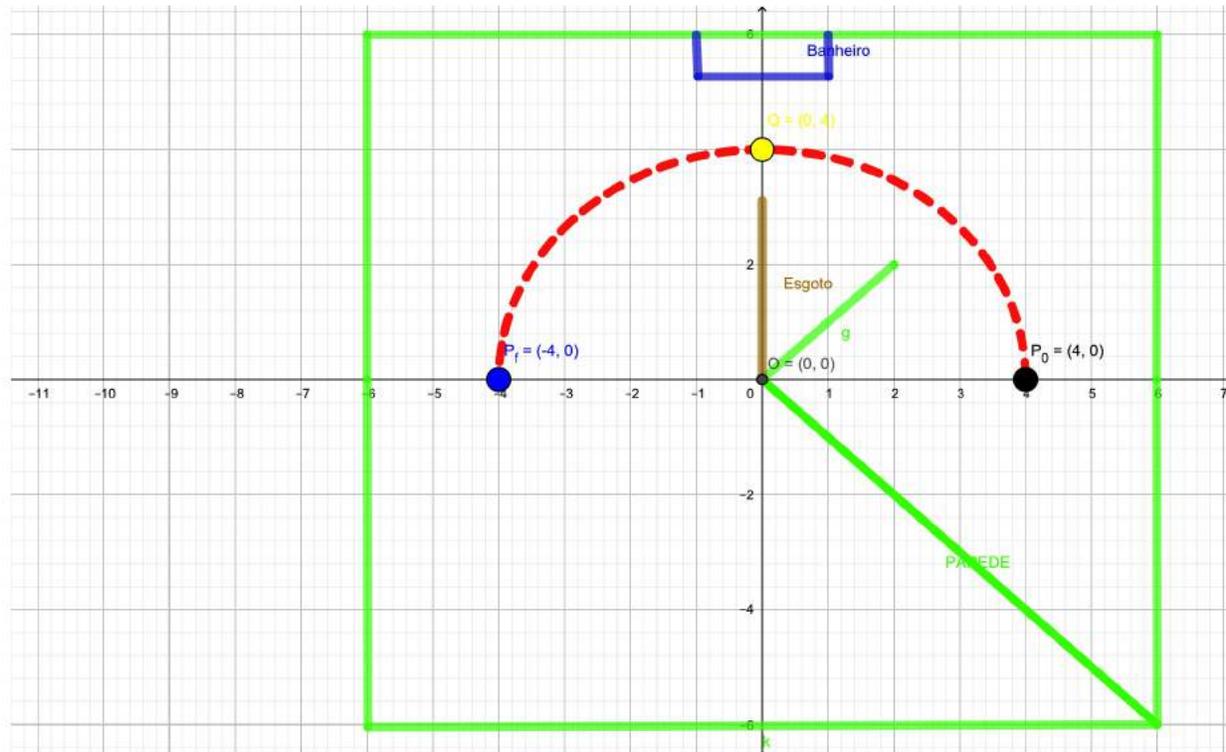


Figura 8.7: A figura tracejada representa a trajetória descrita pelo Robô .

Generalizando o que fizemos acima, pelo Teorema 6.2, obtemos os pontos de uma circunferência  $\mathcal{C}_r(P_0)$  apenas considerando um ponto qualquer sobre a circunferência  $\mathcal{C}_r(O)$ . Mais precisamente, dado um ponto arbitrário  $Q \in \mathcal{C}_r(P_0)$ , existe uma matriz ortogonal  $A$ , tal que  $Q = A.P + P_0$ , onde  $P$  é um ponto sobre a circunferência  $\mathcal{C}_r(O)$ .

Por simplicidade, tomamos

$$P = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}, P_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \text{ e } Q = I_2.P + P_0 = \begin{bmatrix} r + x_0 \\ y_0 \end{bmatrix},$$

onde a matriz ortogonal  $A$  é dada em [5], por

$$A = \begin{bmatrix} \frac{x}{r} & \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r} \\ \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r} & -\frac{x}{r} \end{bmatrix}.$$

Segue que a trajetória descrita pelo ponto  $A \cdot P$  ao longo da circunferência  $\mathcal{C}_r(O)$ , partindo do ponto  $P$ , no sentido anti-horário; induz uma trajetória descrita pelo ponto  $A \cdot P + P_0$  ao longo da circunferência  $\mathcal{C}_r(P_0)$ , partindo do ponto  $Q_1$ , no sentido anti-horário.

Assim, considerando o ponto

$$Q_3 = \begin{bmatrix} x_0 - r \\ y_0 \end{bmatrix},$$

podemos nos deslocar ao longo da circunferência  $\mathcal{C}_r(P_0)$ , partindo do ponto  $Q_1$ , até um ponto qualquer  $Q_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$  pertencente ao arco  $\overleftarrow{\Gamma}(Q_1, Q_3)$ , através da operação com matrizes dada a seguir, como ilustra a Figura 8.8.

$$\begin{bmatrix} \frac{x}{r} & \frac{\sqrt{r^2-x^2}}{r} \\ \frac{\sqrt{r^2-x^2}}{r} & -\frac{x}{r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}, \quad (8.3)$$

com  $r \geq x \geq x_1 - x_0$ .

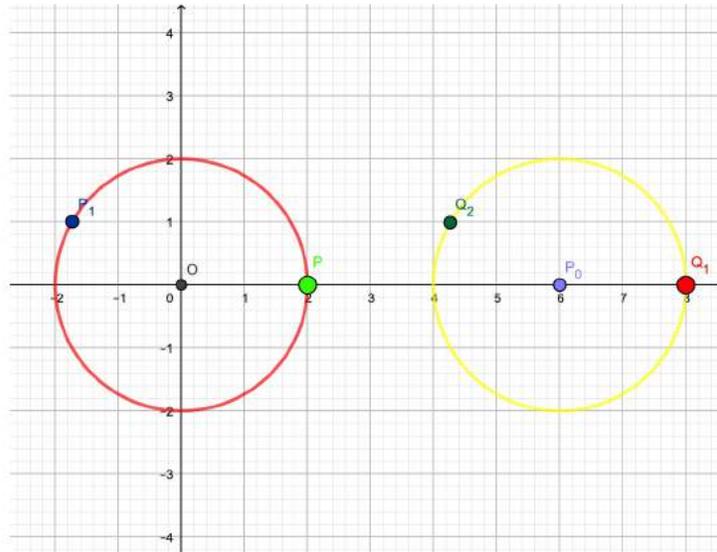


Figura 8.8: Deslocamento do ponto  $Q_1$  até o ponto  $Q_2$ .

**Exemplo 8.3:**

Dado um ponto  $Q_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}$  sobre a circunferência  $\mathcal{C}_2((6, 0))$ . Através da expressão com matrizes:

$$\begin{bmatrix} \frac{x}{2} & \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \\ \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} & -\frac{x}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

com  $2 \geq x \geq -2$ , percorremos todo o arco com extremidades  $Q_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $Q_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ , ao longo da circunferência  $\mathcal{C}_2((6, 0))$ , no sentido anti-horário. Em particular,

$$\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,26 \\ 1 \end{bmatrix},$$

assim se percorremos  $2 \geq x \geq -\sqrt{3}$  obtemos a trajetória desde o ponto  $Q_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}$  até o ponto  $Q_2 = \begin{bmatrix} 4,26 \\ 1 \end{bmatrix}$ , ao longo da circunferência  $\mathcal{C}_r((6, 0))$ , no sentido anti-horário, como ilustra a Figura 8.9.

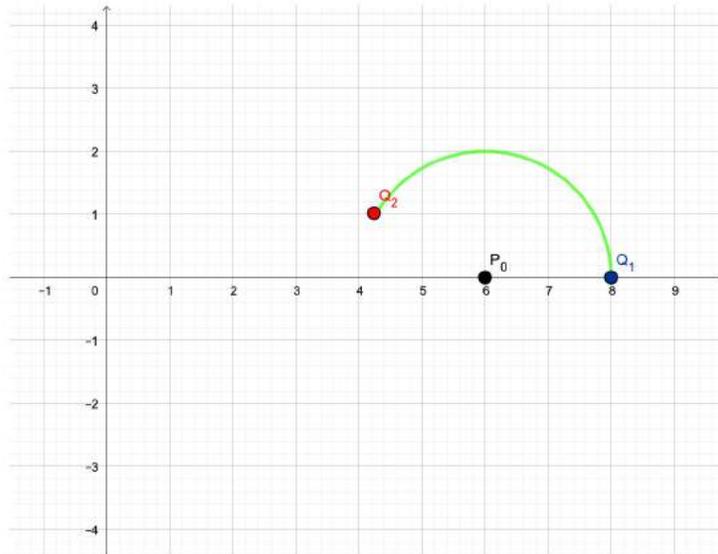


Figura 8.9: Deslocamento do ponto  $Q_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}$  até o ponto  $Q_2 = \begin{bmatrix} 4,26 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

Do mesmo modo, podemos nos deslocar ao longo da circunferência  $\mathcal{C}_r(P_0)$ , partindo do ponto  $Q_1$ , até um ponto qualquer  $Q_2$  pertencente ao arco  $\overleftarrow{\Gamma}(Q_3, Q_1)$ , através da operação com matrizes da seguinte maneira: continuamos com o processo anterior até percorrer todo o arco  $\overrightarrow{\Gamma}(Q_1, Q_3)$ , através da expressão (8.3); em seguida completamos o percurso restante até chegar ao ponto  $Q_2$ , através da expressão abaixo:

$$\begin{bmatrix} \frac{x}{r} & \frac{\sqrt{r^2-x^2}}{r} \\ \frac{\sqrt{r^2-x^2}}{r} & -\frac{x}{r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \quad (8.4)$$

com  $r \geq x \geq x_0 - x_1$ , como ilustra a Figura 8.10.

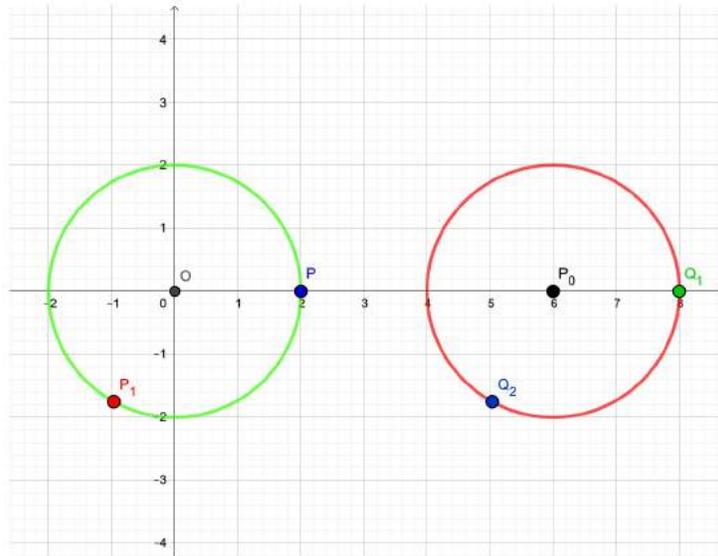


Figura 8.10: Deslocamento do ponto  $Q_1$  até o ponto  $Q_2$ .

#### Exemplo 8.4:

Dado um ponto  $Q_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}$  sobre a circunferência  $C_2((6, 0))$ . Através da expressão com matrizes:

$$\begin{bmatrix} \frac{x}{2} & -\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} & -\frac{x}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

com  $2 \geq x \geq -2$ , percorreremos todo o arco com extremidades  $Q_1$  e  $Q_3$ , ao longo da circunferência  $C_2((6, 0))$ , no sentido anti-horário. Continuando com o processo, através da expressão:

$$\begin{bmatrix} \frac{x}{2} & \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \\ \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} & -\frac{x}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

com  $-2 \leq x \leq 1,74$ , percorremos no sentido anti-horário o arco com

extremidades  $Q_3$  e  $Q_1$ , até chegar ao ponto  $Q_2 = \begin{bmatrix} 4,26 \\ -1 \end{bmatrix}$ . Em particular,

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,26 \\ -1 \end{bmatrix},$$

representa o deslocamento do ponto  $Q_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}$  até o ponto  $Q_2 = \begin{bmatrix} 4,26 \\ -1 \end{bmatrix}$ , ao longo da circunferência  $\mathcal{C}_r((6,0))$ , no sentido anti-horário, como ilustra a Figura 8.11.

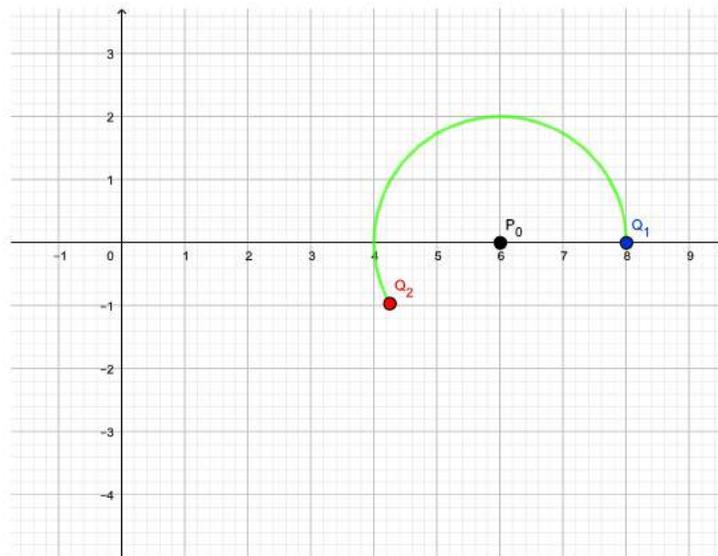


Figura 8.11: Deslocamento do ponto  $Q_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}$  até o ponto  $Q_2 = \begin{bmatrix} 4,26 \\ -1 \end{bmatrix}$ .

O deslocamento de pontos ao longo da circunferência  $\mathcal{C}_r(P_0)$ , no sentido horário é feito de modo análogo. O deslocamento de um ponto ao longo de uma circunferência, como descrito acima, fornece a comodidade de deslocar simultaneamente um ponto ao longo de uma circunferência centrada na origem e um ponto ao longo de circunferência centrada em um ponto  $P_0$ ,

ambas como o mesmo raio  $r > 0$ .

De um modo geral, introduziremos a noção de deslocamento de um ponto ao longo de uma circunferência centrada em um ponto  $P_0$ , qualquer.

Pelo Teorema 6.3, fixado um ponto arbitrário  $P$  pertencente a uma circunferência  $\mathcal{C}_r(P_0)$ , podemos obter todos os pontos de  $\mathcal{C}_r(P_0)$  através de operações com matrizes. Mais precisamente, dado um ponto qualquer  $Q \in \mathcal{C}_r(P_0)$ , existe uma matriz ortogonal  $A$  tal que  $Q = A(P - P_0) + P_0$ .

Pelo Teorema 6.3, tomamos  $P_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ ,  $P = \begin{bmatrix} x_0 + r \\ y_0 \end{bmatrix}$ ,  $Q = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  e

$$A = \begin{bmatrix} \frac{(x - x_0)}{r} & \frac{(y - y_0)}{r} \\ -\frac{(y - y_0)}{r} & \frac{(x - x_0)}{r} \end{bmatrix}.$$

Como  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ , então  $(y - y_0) = \pm\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}$ . Daí, podemos escrever a matriz  $A$  de uma das seguintes maneiras:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{(x - x_0)}{r} & \frac{\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}}{r} \\ -\frac{\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}}{r} & \frac{(x - x_0)}{r} \end{bmatrix}$$

ou

$$A = \begin{bmatrix} \frac{(x - x_0)}{r} & -\frac{\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}}{r} \\ \frac{\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}}{r} & \frac{(x - x_0)}{r} \end{bmatrix}.$$

Sejam os pontos  $P_1 = \begin{bmatrix} x_0 + r \\ y_0 \end{bmatrix}$  e  $P_2 = \begin{bmatrix} x_0 - r \\ y_0 \end{bmatrix}$  pontos sobre a circunferência  $\mathcal{C}_r(P_0)$ . Dado arbitrariamente um ponto  $Q_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_r(P_0)$ , temos quatro casos a considerar:

- (I)  $Q_1$  pertence ao arco  $\overleftarrow{\Gamma}(P_1, P_2)$ . Neste caso, seja o arco  $\overleftarrow{\Gamma}(Q_1, Q_3)$  contido no arco  $\overleftarrow{\Gamma}(P_1, P_2)$ , para algum ponto  $Q_3 = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix}$  sobre a circunferência  $\mathcal{C}_r(P_0)$ . Temos que todo ponto  $Q$  pertencente a circunferência  $\mathcal{C}_r(P_0)$  é dado pela expressão:

$$\begin{bmatrix} \frac{(x - x_0)}{r} & -\frac{\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}}{r} \\ \frac{\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}}{r} & \frac{(x - x_0)}{r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \quad (8.5)$$

com  $x_1 \geq x \geq x_3$  se, e somente se,  $Q$  é um ponto pertencente ao arco  $\overleftarrow{\Gamma}(Q_1, Q_3)$ .

Dessa forma, se considerarmos um ponto arbitrário  $Q_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_r(P_0)$ , pertencente ao arco  $\overleftarrow{\Gamma}(Q_1, Q_3)$ , então a medida que percorremos a circunferência  $\mathcal{C}_r(P_0)$  partindo do ponto  $Q_1$  até chegar ao ponto  $Q_2$ , no sentido anti-horário, sempre encontraremos pontos sobre  $\mathcal{C}_r(P_0)$  dados pela expressão (8.15). Portanto, utilizando (8.15) descrevemos todo o percurso ao longo da circunferência  $\mathcal{C}_r(P_0)$ , partindo do ponto  $Q_1$  até chegar em  $Q_2$ , no sentido anti-horário, como ilustra a Figura 8.12.

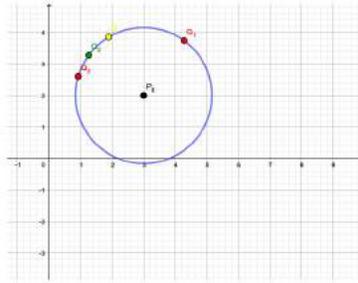


Figura 8.12: Deslocamento do ponto  $Q_1$  até o ponto  $Q_2$ , no sentido anti-horário .

- (II)  $Q_1$  pertence ao arco  $\overleftarrow{\Gamma}(P_2, P_1)$ . Neste caso, seja o arco  $\overleftarrow{\Gamma}(Q_1, Q_3)$  contido no arco  $\overleftarrow{\Gamma}(P_2, P_1)$ , para algum ponto  $Q_3 = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix}$  sobre a circunferência  $\mathcal{C}_r(P_0)$ . Temos que ponto  $Q$  pertencente a circunferência  $\mathcal{C}_r(P_0)$  é dado pela expressão:

$$\begin{bmatrix} \frac{(x - x_0)}{r} & \frac{\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}}{r} \\ -\frac{\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}}{r} & \frac{(x - x_0)}{r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}, \quad (8.6)$$

com  $x_1 \leq x \leq x_3$  se, e somente se,  $Q$  é um ponto pertencente ao arco  $\overleftarrow{\Gamma}(Q_1, Q_3)$ .

Dessa forma, se considerarmos um ponto arbitrário  $Q_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_r(P_0)$ , pertencente ao arco  $\overleftarrow{\Gamma}(Q_1, Q_3)$ , então a medida que percorremos a circunferência  $\mathcal{C}_r(P_0)$  partindo do ponto  $Q_1$  até chegar ao ponto  $Q_2$ , no sentido anti-horário, sempre encontraremos pontos sobre  $\mathcal{C}_r(P_0)$  dados pela expressão (8.17). Portanto, utilizando (8.17) descrevemos todo o percurso ao longo da circunferência  $\mathcal{C}_r(P_0)$ , partindo do ponto  $Q_1$  até chegar em  $Q_2$ , no sentido anti-horário, como ilustra a Figura 8.13.

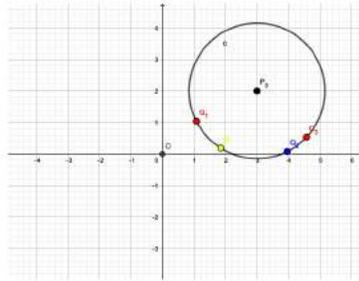


Figura 8.13: Deslocamento do ponto  $Q_1$  até o ponto  $Q_2$ , no sentido anti-horário .

- (III)  $Q_1$  pertence ao arco  $\overleftarrow{\Gamma}(P_1, P_2)$  e  $Q_2$  pertence ao arco  $\overleftarrow{\Gamma}(P_2, P_1)$ . Neste caso, por (8.15) percorremos todo o arco  $\overleftarrow{\Gamma}(Q_1, P_2)$ , com  $x_1 \geq x \geq x_0 - r$ . Continuamos o processo através da expressão (8.17), com  $x_0 - r \leq x \leq x_2$  até chegar ao ponto  $Q_2$ , como ilustra a Figura 8.14.

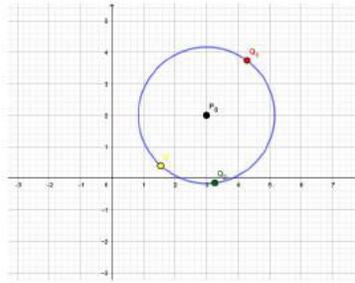


Figura 8.14: Deslocamento do ponto  $Q_1$  até o ponto  $Q_2$ , no sentido anti-horário .

- (IV)  $Q_1$  pertence ao arco  $\overleftarrow{\Gamma}(P_2, P_1)$  e  $Q_2$  pertence ao arco  $\overleftarrow{\Gamma}(P_1, P_2)$ . Neste caso, por (8.17) percorremos todo o arco  $\overleftarrow{\Gamma}(Q_1, P_1)$ , com  $x_1 \leq x \leq x_0 + r$ . Continuamos o processo através da expressão (8.15), com  $x_0 + r \leq x \leq x_2$  até chegar ao ponto  $Q_2$ , como ilustra a Figura 8.15.

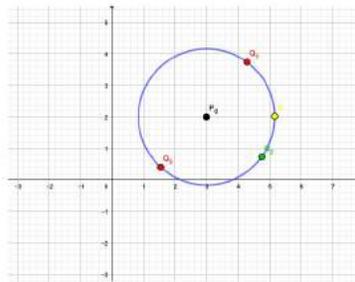


Figura 8.15: Deslocamento do ponto  $Q_1$  até o ponto  $Q_2$ , no sentido anti-horário .

De modo análogo, introduzimos a noção de deslocamento de pontos ao longo da circunferência  $\mathcal{C}_r(P_0)$ , no sentido horário. Dado arbitrariamente um ponto  $Q_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_r(P_0)$ , temos quatro casos a considerar:

- (I)  $Q_1$  pertence ao arco  $\overleftarrow{\Gamma}(P_1, P_2)$ . Neste caso, seja o arco  $\overrightarrow{\Gamma}(Q_1, Q_3)$  contido no arco  $\overleftarrow{\Gamma}(P_1, P_2)$ , para algum ponto  $Q_3 = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix}$  sobre a

circunferência  $\mathcal{C}_r(P_0)$ . Temos que todo ponto  $Q$  pertencente a circunferência  $\mathcal{C}_r(P_0)$  é dado pela expressão (8.15) com  $x_1 \leq x \leq x_3$  se, e somente se,  $Q$  é um ponto pertencente ao arco  $\vec{\Gamma}(Q_1, Q_3)$ .

Dessa forma, se considerarmos um ponto arbitrário  $Q_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_r(P_0)$ , pertencente ao arco  $\vec{\Gamma}(Q_1, Q_3)$ , então a medida que percorrermos a circunferência  $\mathcal{C}_r(P_0)$  partindo do ponto  $Q_1$  até chegar ao ponto  $Q_2$ , no sentido horário, sempre encontraremos pontos sobre  $\mathcal{C}_r(P_0)$  dados pela expressão (8.15). Portanto, utilizando (8.15) descrevemos todo o percurso ao longo da circunferência  $\mathcal{C}_r(P_0)$ , partindo do ponto  $Q_1$  até chegar em  $Q_2$ , no sentido horário, como ilustra a Figura 8.16.

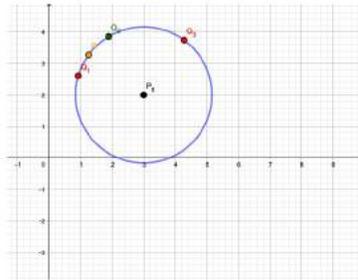


Figura 8.16: Deslocamento do ponto  $Q_1$  até o ponto  $Q_2$ , no sentido horário .

- (II)  $Q_1$  pertence ao arco  $\overleftarrow{\Gamma}(P_2, P_1)$ . Neste caso, seja o arco  $\vec{\Gamma}(Q_1, Q_3)$  contido no arco  $\overleftarrow{\Gamma}(P_2, P_1)$ , para algum ponto  $Q_3 = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix}$  sobre a circunferência  $\mathcal{C}_r(P_0)$ . Temos que ponto  $Q$  pertencente a circunferência  $\mathcal{C}_r(P_0)$  é dado pela expressão (8.17) com  $x_1 \geq x \geq x_3$  se, e somente se,  $Q$  é um ponto pertencente ao arco  $\vec{\Gamma}(Q_1, Q_3)$ .

Dessa forma, se considerarmos um ponto arbitrário  $Q_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_r(P_0)$ , pertencente ao arco  $\vec{\Gamma}(Q_1, Q_3)$ , então a medida que percorrermos a circunferência  $\mathcal{C}_r(P_0)$  partindo do ponto  $Q_1$  até chegar ao ponto  $Q_2$ , no sentido horário, sempre encontraremos pontos sobre  $\mathcal{C}_r(P_0)$  dados pela expressão (8.17). Portanto, utilizando (8.17) descrevemos todo o percurso ao longo da circunferência  $\mathcal{C}_r(P_0)$ , partindo do ponto  $Q_1$  até chegar em  $Q_2$ , no sentido horário, como ilustra a Figura 8.17.

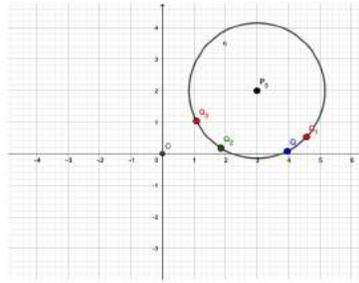


Figura 8.17: Deslocamento do ponto  $Q_1$  até o ponto  $Q_2$ , no sentido horário .

- (III)  $Q_1$  pertence ao arco  $\overleftarrow{\Gamma}(P_1, P_2)$  e  $Q_2$  pertence ao arco  $\overleftarrow{\Gamma}(P_2, P_1)$ . Neste caso, por (8.15) percorremos todo o arco  $\overrightarrow{\Gamma}(Q_1, P_1)$ , com  $x_1 \leq x \leq x_0 + r$ . Continuamos o processo através da expressão (8.17), com  $x_0 + r \geq x \geq x_2$  até chegar ao ponto  $Q_2$ , como ilustra a Figura 8.18.

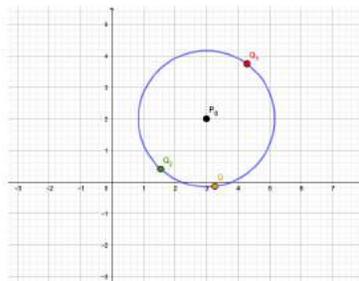


Figura 8.18: Deslocamento do ponto  $Q_1$  até o ponto  $Q_2$ , no sentido horário .

- (IV)  $Q_1$  pertence ao arco  $\overleftarrow{\Gamma}(P_2, P_1)$  e  $Q_2$  pertence ao arco  $\overleftarrow{\Gamma}(P_1, P_2)$ . Neste caso, por (8.17) percorremos todo o arco  $\overrightarrow{\Gamma}(Q_1, P_2)$ , com  $x_1 \geq x \geq x_0 - r$ . Continuamos o processo através da expressão (8.15), com  $x_0 - r \leq x \leq x_2$  até chegar ao ponto  $Q_2$ , como ilustra a Figura 8.19.

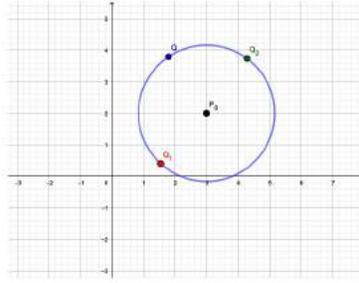


Figura 8.19: Deslocamento do ponto  $Q_1$  até o ponto  $Q_2$ , no sentido horário .

**Exemplo 8.5:**

Seja o ponto  $Q_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ . Através da expressão

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3}x & -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{9}{4}-x^2} \\ \frac{2}{3}\sqrt{\frac{9}{4}-x^2} & \frac{2}{3}x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (8.7)$$

com  $0 \geq x \geq -\frac{3}{2}$ , percorremos a circunferência  $\mathcal{C}_3((0, \frac{1}{2}))$ , partindo do ponto  $Q_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ , até o ponto  $P_2 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$  no sentido anti-horário. Em seguida, através da expressão

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3}x & \frac{2}{3}\sqrt{\frac{9}{4}-x^2} \\ -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{9}{4}-x^2} & \frac{2}{3}x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (8.8)$$

com  $-\frac{3}{2} \leq x \leq 0$ , percorremos a circunferência  $\mathcal{C}_3((0, \frac{1}{2}))$ , partindo do ponto  $P_2 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ , até o ponto  $Q_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ , no sentido anti-horário. Segue que as trajetórias descritas através das expressões (8.7)–(8.8), representam o deslocamento do ponto  $Q_1$  até o ponto  $Q_2$ , como ilustra a Figura 8.20.

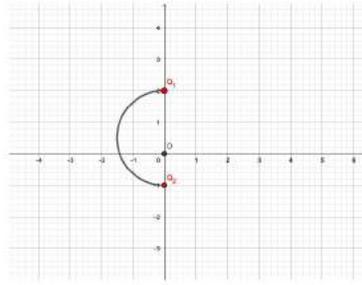


Figura 8.20: Deslocamento do ponto  $Q_1$  até o ponto  $Q_2$ , no sentido anti-horário .

Continuando com o processo, através da expressão:

$$\begin{bmatrix} x & \sqrt{1-x^2} \\ -\sqrt{1-x^2} & x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.9)$$

com  $0 \leq x \leq 1$ , percorremos a circunferência  $\mathcal{C}_1(O)$  partindo do ponto  $Q_2$ , no sentido anti-horário, até encontrar o ponto  $Q_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Em seguida,

$$\begin{bmatrix} x & -\sqrt{1-x^2} \\ \sqrt{1-x^2} & x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.10)$$

com  $1 \geq x \geq 0$  descreve a trajetória descrita a partir do ponto  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  até o ponto  $Q_3$ . Segue que a trajetória descrita através das expressões (8.9) – (8.10), representam o deslocamento do ponto  $Q_2$  até o ponto  $Q_3$ , como ilustra a Figura 8.21.

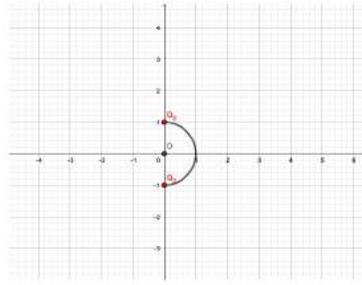


Figura 8.21: Deslocamento do ponto  $Q_2$  até o ponto  $Q_3$ , no sentido anti-horário .

Por último, através da expressão

$$\begin{bmatrix} 2x & -2\sqrt{\frac{1}{4}-x^2} \\ 2\sqrt{\frac{1}{4}+x^2} & 2x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (8.11)$$

com  $0 \geq x \geq -\frac{1}{2}$ , percorremos a circunferência  $\mathcal{C}_1((0, \frac{1}{2}))$ , partido do ponto  $Q_3$  até o ponto  $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ . Em seguida, através da expressão

$$\begin{bmatrix} 2x & 2\sqrt{\frac{1}{4}-x^2} \\ -2\sqrt{\frac{1}{4}+x^2} & 2x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (8.12)$$

com  $-\frac{1}{2} \leq x \leq 0$  representa a trajetória descrita a partir do ponto  $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$  até à origem  $O$ . Segue que a trajetória descrita através das expressões (8.11) – (8.12), representam o deslocamento do ponto  $Q_3$  até a origem  $O$ , como ilustra a Figura 8.22.

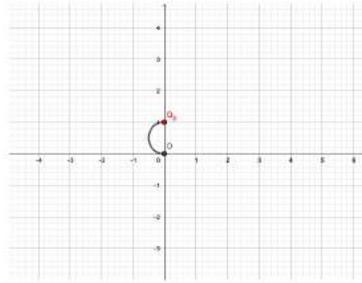


Figura 8.22: Deslocamento do ponto  $Q_3$  até a origem  $O$ , no sentido anti-horário .

Portanto, através de operações com matrizes, conseguimos a trajetória descrita a partir do ponto  $Q_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$  até a origem  $O$ , no sentido anti-horário, como ilustra a Figura 8.23.

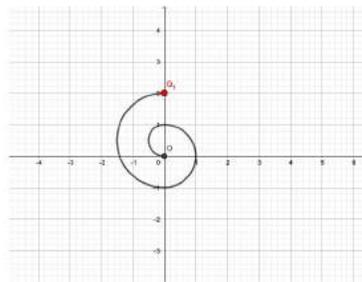


Figura 8.23: Deslocamento do ponto  $Q_1$  até o ponto  $Q_2$ , no sentido anti-horário .

**Exemplo 8.6:**

Determine o deslocamento da origem  $O$  até o ponto  $P$ , como ilustra a Figura 8.24

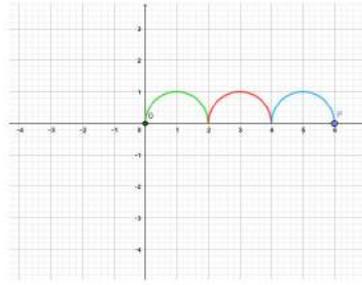


Figura 8.24: Deslocamento da origem  $O$ .

*Solução.* O deslocamento do ponto  $O$  até  $P$  ilustrado pela Figura 8.24 pode ser feito considerando os seguintes passos.

- (Passo 1) O ponto  $O$  desloca-se sobre uma semicircunferência, de raio 1 e centro  $(1,0)$ , no sentido horário até o ponto  $P_1 = (2, 0)$ ;
- (Passo 2) O Ponto  $P_1$  desloca-se sobre uma semicircunferência, de raio 1 e centro  $(3,0)$ , no sentido horário até o ponto  $P_2 = (4, 0)$ ;
- (Passo 3) O ponto  $P_2$  desloca-se sobre uma semicircunferência, de raio 1 e centro  $(5,0)$ , no sentido horário até o ponto  $P = (6, 0)$

Para o (Passo 1), pelo Teorema 6.3 e as observações feitas sobre a equação 8.3, temos que a trajetória de  $O$  até  $P$  como descrita na Figura 8.24 é dada através da expressão

$$AP' + P_0 = \begin{bmatrix} \frac{x}{r} & \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r} \\ \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r} & -\frac{x}{r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix},$$

com  $-r \leq x \leq r$ . Ou seja, o arco  $\vec{\Gamma}_1(O, P_1)$  é escrito da seguinte maneira:

$$AP + P_0 = \begin{bmatrix} x & \sqrt{1 - x^2} \\ \sqrt{1 - x^2} & -x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde  $-1 \leq x \leq 1$ , como ilustra a Figura 8.25.

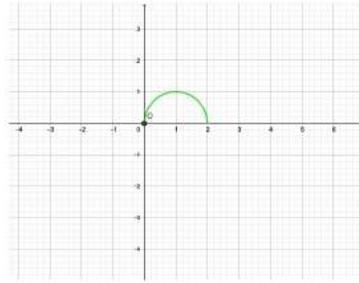


Figura 8.25: O deslocamento da origem  $O$ , após o primeiro passo .

Para o (Passo 2) Seja  $\vec{\Gamma}_2(P_1, P_2)$ , seguindo de modo análogo ao que foi feito no (Passo 1), a expressão:

$$\begin{bmatrix} x & \sqrt{1-x^2} \\ \sqrt{1-x^2} & -x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde  $-1 \leq x \leq 1$ , define todo o arco  $\vec{\Gamma}_2(P_1, P_2)$  de centro  $(1,0)$ . Nesse caso se  $x = -1$  então a expressão acima representa o ponto  $P_1$ , e se  $x = 1$ , então a expressão representa o ponto  $P_2$ , como ilustra a Figura 8.26.

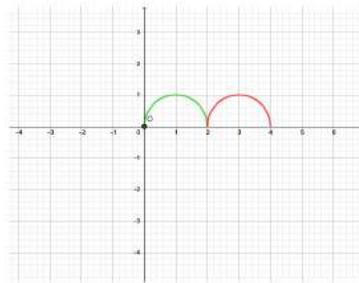


Figura 8.26: O deslocamento da origem  $O$ , após o segundo passo .

Para o (Passo 3), Seja  $\vec{\Gamma}_3(P_2, P)$  de centro  $(3,0)$ , seguindo novamente de modo análogo ao que foi feito nos dois passos anteriores, a expressão

$$\begin{bmatrix} x & \sqrt{1-x^2} \\ \sqrt{1-x^2} & -x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde  $-1 \leq x \leq 1$ , descreve o deslocamento de  $P_2$  sobre  $\vec{\Gamma}_3(P_2, P)$  até o ponto  $P$ . Onde  $x = -1$  define o ponto  $P_2$  e  $x = 1$  define o ponto  $P$ .

**Exemplo 8.7:**

Determine o deslocamento do ponto  $P_1$  ao longo do percurso, ilustrado na Figura 8.27.

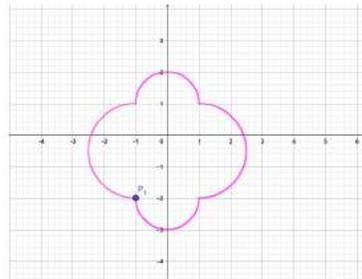


Figura 8.27: Deslocamento do ponto  $P_1$ .

*Solução.* Primeiramente deve-se notar que o ponto  $P_1$  desloca-se por semicircunferências de raios diferentes. Sendo assim vamos descrever os passos que devemos fazer:

- (Passo 1) Deslocar  $P_1 = (-1, -2)$  até  $P_2 = (1, -2)$  no sentido anti-horário;
- (Passo 2) Deslocar  $P_2$  até  $P_3 = (1, 1)$ , no sentido anti-horário;
- (Passo 3) Deslocar  $P_3$  até  $P_4 = (-1, 1)$ , no sentido anti-horário;
- (Passo 4) Deslocar  $P_4$  até  $P_5 = P_1 = (-1, -2)$ , no sentido anti-horário.

Para o (Passo 1), seja  $\overleftarrow{\Gamma}_1(P_1, P_2)$  de centro  $(0, -2)$ . Segundo a equação 8.15, O deslocamento de  $P_1$  sobre  $\overleftarrow{\Gamma}_1(P_1, P_2)$  é dado por

$$\begin{bmatrix} x & -\sqrt{1-x^2} \\ \sqrt{1-x^2} & x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix},$$

onde  $1 \geq x \geq -1$ . Nesse caso  $x = 1$  define o ponto  $P_1$  e  $x = -1$  define o ponto  $P_2$ , como ilustra a Figura 8.28.

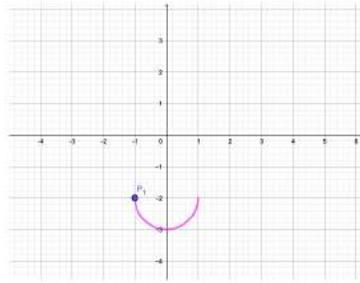


Figura 8.28: Deslocamento do ponto  $P_1$ , após o primeiro passo .

Para o (Passo 2), seguimos da mesma forma, considerando agora a expressão

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot \frac{x-1}{3} & -2 \cdot \frac{\sqrt{\frac{9}{4} - (x-1)^2}}{3} \\ \frac{\sqrt{\frac{9}{4} - (x-1)^2}}{3} & 2 \cdot \frac{x-1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

onde  $1 + \frac{3}{2} \geq x \geq 1 - \frac{3}{2}$ . Essa expressão define o arco  $\overleftarrow{\Gamma}_2(P_2, P_3)$  de centro  $(1, -\frac{3}{2})$ . Nesse caso  $x = 1 + \frac{3}{2}$  define o ponto  $P_2$  e  $x = 1 - \frac{3}{2}$  define o ponto  $P_3$ , como ilustra a Figura 8.29.

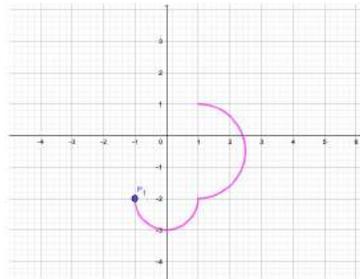


Figura 8.29: Deslocamento do ponto  $P_1$ , após o segundo passo .

Para o (Passo 3), seguimos como nos últimos dos passos, veja que a

expressão,

$$\begin{bmatrix} x & -\sqrt{1-x^2} \\ \sqrt{1-x^2} & x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde  $1 \geq x \geq -1$ , define o arco  $\overleftarrow{\Gamma}_1(P_3, P_4)$  de centro  $(0, 1)$ . Onde  $x = 1$  define o ponto  $P_3$ , e o ponto  $P_4$  é encontrado quando  $x = -1$ , como ilustra a Figura 8.30.

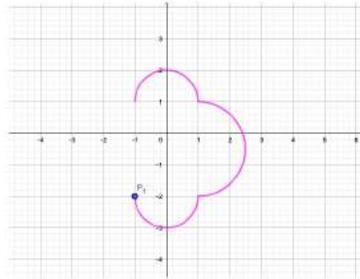


Figura 8.30: Deslocamento do ponto  $P_1$ , após o terceiro passo .

Para o (Passo 4) continuaremos de forma análoga. Ou seja, o arco  $\overrightarrow{\Gamma}_4(P_4, P_1)$  é dado por:

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot \frac{x+1}{3} & -2 \cdot \frac{\sqrt{\frac{9}{4} - (x+1)^2}}{3} \\ \frac{\sqrt{\frac{9}{4} - (x+1)^2}}{3} & 2 \cdot \frac{x+1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

onde  $-1 + \frac{3}{2} \geq x \geq -1 - \frac{3}{2}$ . Dessa forma  $x = -1 + \frac{3}{2}$  define o ponto  $P_4$ , e  $x = -1 - \frac{3}{2}$  define o ponto  $P_1$ .

### Exemplo 8.8:

Determine o deslocamento do ponto  $Q_1$  ao longo do percurso, ilustrado na Figura 8.31

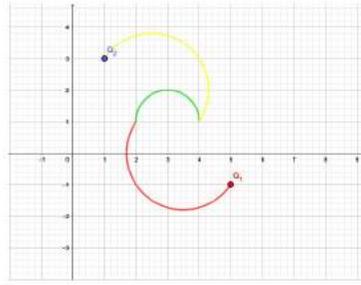


Figura 8.31: Deslocamento do ponto  $Q_1$  até o ponto  $Q_2$ .

- Solução.* Veja que o ponto  $Q_1$  desloca-se por meio de 3 semicircunferência de raios distintos. Então devemos separar a trajetória de  $Q_1$  em 3 partes:
- (Passo 1)  $Q_1 = (5, -1)$  desloca-se até o ponto  $P_1 = (2, 1)$ , no sentido horário;
- (Passo 2) o ponto  $P_1$  desloca-se até o ponto  $P_2 = (4, 1)$  no sentido horário;
- (Passo 3) por fim, o ponto  $P_2$  desloca-se até o ponto  $Q_2 = (1, 3)$ , no sentido anti-horário.

Para o (Passo 1), a expressão seguinte define o arco  $\vec{\Gamma}_1(Q_1, P_1)$  de centro  $\left(\frac{7}{2}, 0\right)$ ,

$$\begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{13}}{13} \cdot \left(x - \frac{7}{2}\right) & \frac{2\sqrt{13}}{13} \cdot \sqrt{\frac{13}{4} - \left(x - \frac{7}{2}\right)^2} \\ -\frac{2\sqrt{13}}{13} \cdot \sqrt{\frac{13}{4} - \left(x - \frac{7}{2}\right)^2} & \frac{2\sqrt{13}}{13} \cdot \left(x - \frac{7}{2}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde  $\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \geq x \geq \frac{7}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$ . No caso em que  $x = \frac{7}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$  a expressão nos garante o ponto  $Q_1$ , e se  $x = \frac{7}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$  então a expressão nos garante o ponto  $P_1$ , como ilustra a Figura 8.32.

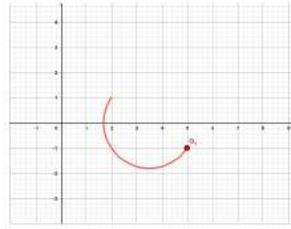


Figura 8.32: Deslocamento do ponto  $Q_1$ , após o primeiro passo.

Para o (Passo 2), seguiremos como anteriormente, isto é, a expressão

$$\begin{bmatrix} \frac{x-3}{-\sqrt{1-(x-3)^2}} & \frac{\sqrt{1-(x-3)^2}}{x-3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

onde  $4 \geq x \geq 2$ , define o arco  $\overleftarrow{\Gamma}_2(P_1, P_2)$  de centro  $(3, 1)$ . Nesse caso,  $x = 4$  define o ponto  $P_1$ , e  $x = 2$  define o ponto  $P_2$ , como ilustra a Figura 8.33.

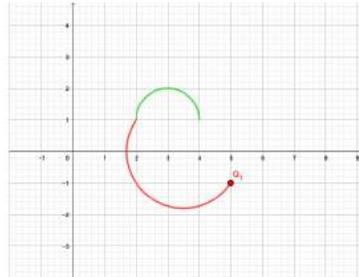


Figura 8.33: Deslocamento do ponto  $Q_1$ , após o primeiro passo.

Para o (Passo 3), seja o arco  $\overrightarrow{\Gamma}_3(P_2, Q_2)$  de centro  $\left(\frac{5}{2}, 2\right)$ , a expressão

$$\begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{13}}{13} \cdot \left(x - \frac{5}{2}\right) & -\frac{2\sqrt{13}}{13} \cdot \sqrt{\frac{13}{4} - \left(x - \frac{5}{2}\right)^2} \\ \frac{2\sqrt{13}}{13} \cdot \sqrt{\frac{13}{4} - \left(x - \frac{5}{2}\right)^2} & \frac{2\sqrt{13}}{13} \cdot \left(x - \frac{5}{2}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ 2 \end{bmatrix},$$

onde  $\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \geq x \geq \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$ , define  $\overleftarrow{\Gamma}_3(P_2, Q_2)$ , e além disso  $x = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$  define  $P_2$  e  $x = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$  define  $Q_2$ . Portanto, depois de seguir os 3 passos acima conseguimos que o ponto  $Q_1$  desloque-se até o ponto  $Q_2$  sobre a curva da figura 8.31.

### Problematização

Nuvens perigosas de contaminação atmosférica, podem ser causadas por vários fatores: como derramamento de caminhão-tanque em rodovias, acidentes de lançamento industrial, ou ataques terroristas químicos, biológicos, nucleares. Dependendo dos ventos predominantes e da flutuabilidade da nuvem, os contaminantes podem ser transportados por longas distâncias, ou permanecer em algumas regiões por um longo período.

Os perigos para a população e para o meio ambiente são altamente variáveis, uma vez que a gravidade da exposição depende do tipo de contaminação, concentração, duração da exposição, modo de contato e degradação natural da toxina. Conseqüentemente, as respostas a um evento como este podem variar de uma simples transmissão pela tv ou meios digitais, avisos para permanecer dentro de casa ou evitar a área, para evacuação de emergência em grande escala e subsequente quarentena e descontaminação.

A determinação imediata da espécies de toxinas, origem da nuvem, estrutura da nuvem e previsões de evolução da nuvem teria benefícios significativos na prevenção da exposição e no planejamento de solução de baixo custo.

Suponhamos que ocorra uma explosão em um caminhão tanque na estrada Teresina- União, aproximadamente 25 quilômetros do centro de Teresina. O ocorrido produziu uma nuvem de 50 metros de diâmetro, à uma altura de 60 metros, que segue em direção a cidade de Teresina a uma velocidade de 5 quilômetros por hora. Para uma tomada de decisão eficiente, a nuvem será perseguida por um veículo autônomo ( para evitar a exposição do piloto com a nuvem), equipado com sensores de alta precisão e operado a baixo custo. O veículo utilizado será um MAV, que traduzido do inglês significa micro veículo aéreo, que é um veículo pequeno que pode voar por até duas horas, como ilustra a Figura 8.34.



Figura 8.34: MAV-micro veículo aéreo .

Fonte: <https://www.enac.fr/en/imav-2017-international-micro-air-vehicle-conference-and-competition>

Considerando um plano  $\pi$  em um sistema de eixos ortogonais  $OXY$ , situado a 60 metros de altura, tal que a origem  $O$  do sistema  $OXY$  coincida com o centro da nuvem. Sabemos que a cada 36 segundos o centro da nuvem desloca-se 50 metros em direção ao sul, ocupando as posições  $O$ ,  $P_0$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ , etc ao longo do plano  $\pi$ , como ilustra a Figura 8.35.

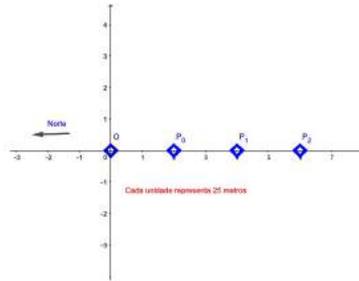


Figura 8.35: Várias posições da nuvem em direção ao sul.

Considere o seguinte problema:

Desconsiderando a velocidade do veículo, grandeza essa que pode ser deixada para a etapa de controle, cada posição  $Q$  do veículo ao longo do plano  $\pi$  será representado por uma matriz coluna  $Q = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ . Assumindo que no instante em que o centro da nuvem coincide com a origem  $O$ , o veículo esteja na posição  $Q_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$  e sabendo que para uma boa coleta de dados, o veículo deve estar a uma distância de 8 à 30 metros da extremidade da nuvem. Além disso, todos os lados da nuvem devem ser observados, pelo menos duas vezes.

Determinaremos uma trajetória a ser seguida pelo veículo.

De fato, escolheremos uma trajetória de tal modo que a cada lado observado pelo veículo, a nuvem tenha um deslocamento máximo de 12,5 metros para o sul. Desta forma, partindo da condição inicial  $Q_0$ , através da expressão:

$$\begin{bmatrix} \frac{x}{2} & \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} & \frac{x}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

com  $-2 \leq x \leq 2$ , descrevemos a trajetória ao longo da circunferência  $\mathcal{C}_2(O)$ ,

no sentido anti-horário, partindo do ponto  $Q_0$  até alcançar o ponto  $P_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ , como ilustra a Figura 8.36.

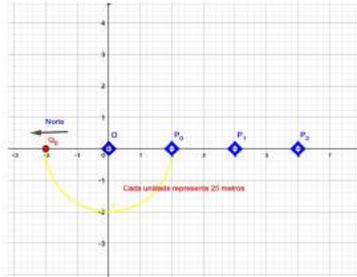


Figura 8.36: Deslocamento do ponto  $Q_0$  até o ponto  $P_0$ , no sentido anti-horário .

Em seguida, através da expressão

$$\begin{bmatrix} \frac{2x-1}{3} & -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{9}{4} - (x - \frac{1}{2})^2} \\ \frac{2}{3}\sqrt{\frac{9}{4} - (x - \frac{1}{2})^2} & \frac{2x-1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

com  $\frac{3}{2} \geq x \geq -\frac{3}{2}$ , descrevemos a trajetória ao longo da circunferência  $\mathcal{C}_{1,5}((\frac{1}{2}, 0))$ , no sentido anti-horário, partindo do ponto  $P_0$  até alcançar o ponto  $Q_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ , como ilustra a Figura 8.37.

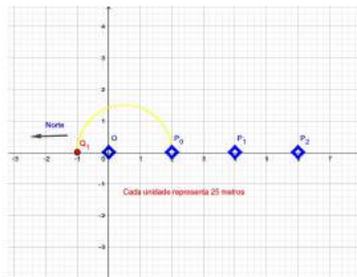


Figura 8.37: Deslocamento do ponto  $P_0$  até o ponto  $Q_1$ , no sentido anti-horário .

Esta duas etapas feitas acima, descrevem a trajetória para a primeira observação da nuvem, como ilustra a Figura 8.38.

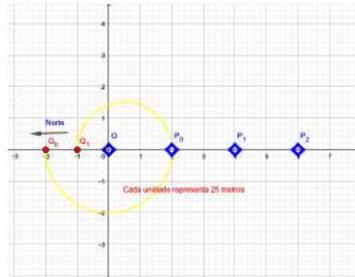


Figura 8.38: Primeira observação da nuvem no sentido anti-horário .

Agora determinaremos a trajetória para uma segunda observação da nuvem. Para isto, considere a expressão

$$\begin{bmatrix} \frac{x-1}{2} & \frac{\sqrt{4-(x-1)^2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{4-(x-1)^2}}{2} & \frac{x-1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

com  $-2 \leq x \leq 2$ , descrevemos a trajetória ao longo da circunferência  $C_2((1,0))$ , no sentido anti-horário, partindo do ponto  $Q_1$  até alcançar o ponto  $Q_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ , como ilustra a Figura 8.39.

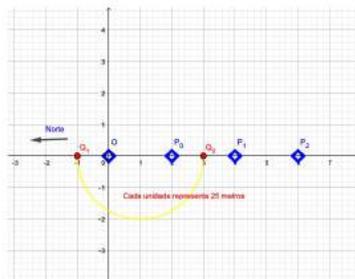


Figura 8.39: Deslocamento do ponto  $Q_1$  até o ponto  $Q_2$ , no sentido anti-horário .

Em seguida completaremos a segunda volta. Para isto, considere a expressão

$$\begin{bmatrix} \frac{2x-3}{3} & -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{9}{4} - (x - \frac{3}{2})^2} \\ \frac{2}{3}\sqrt{\frac{9}{4} - (x - \frac{3}{2})^2} & \frac{2x-3}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

com  $0 \leq x \leq 3$ , descrevemos a trajetória ao longo da circunferência  $\mathcal{C}_{1,5}((\frac{3}{2}, 0))$ , no sentido anti-horário, partindo do ponto  $Q_2$  até alcançar à origem  $O$ , como ilustra a Figura 8.40.

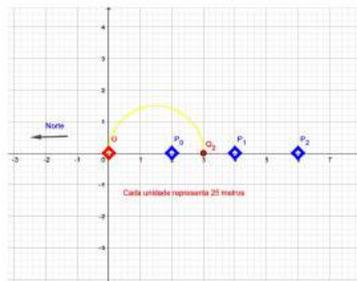


Figura 8.40: Deslocamento do ponto  $Q_2$  até à origem  $O$ , no sentido anti-horário .

Esta duas etapas feitas acima, descrevem a trajetória para à segunda observação da nuvem, como ilustra a Figura 8.41.

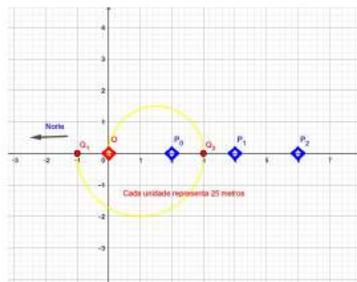


Figura 8.41: Segunda observação da nuvem no sentido anti-horário .

Portanto, obtemos uma trajetória descrita pelo veículo ao perseguir a nuvem de modo seguro e eficiente, como é ilustrado na Figura 8.42.

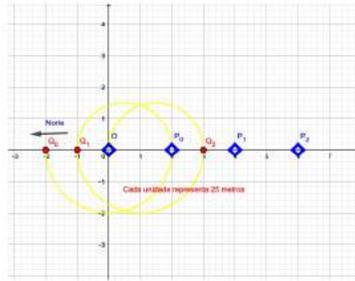


Figura 8.42: Trajetória descrita pelo veículo, no sentido anti-horário .

## 8.2 Uma Volta ao Mundo

Como aplicação imediata da esfera escrita através de operações com matrizes, trabalharemos com o planejamento de rotas de voo de uma aeronave, onde utilizando operações com matrizes obteremos uma maneira de traçar rotas de voos entre determinadas localidades ao longo do globo terrestre.

Para isto, note que a circunferência, de raio exatamente igual a  $r$ , sobre um plano horizontal é a maior circunferência sobre um plano horizontal que pertence a esfera  $\mathcal{E}_r$ . Esta circunferência recebe um nome especial, chama-se equador. O equador divide a esfera  $\mathcal{E}_r$  em duas partes chamadas de calota polar norte, pois contém o polo norte, e calota polar sul, que contém o polo sul. As demais circunferências que pertencem a esfera  $\mathcal{E}_r$  que estão sobre planos horizontais são chamadas de paralelos.

Por sua vez as circunferência sobre um plano vertical pertencentes a esfera  $\mathcal{E}_r$  recebem o nome de meridiano.

Segue-se pelas construções que acabamos de fazer que para nos deslocarmos sobre uma esfera  $\mathcal{E}_r$ , temos que utilizar operações com matrizes percorrendo sempre os paralelos e os meridianos até atingir o desejado.

### Exemplo 8.9:

Seja a esfera  $\mathcal{E}_1$ , consideramos o ponto  $Q_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  sobre o equador e o

ponto  $Q_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$  sobre um meridiano, como ilustra a Figura 8.43.

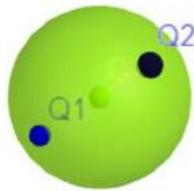


Figura 8.43: Esfera de raio 1 .

Para nos deslocarmos do ponto  $Q_1$  até o ponto  $Q_2$ , seguiremos o seguinte deslocamento:

(i) através do produto de matrizes

$$\begin{bmatrix} x & \sqrt{1-x^2} & 0 \\ \sqrt{1-x^2} & -x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

com  $-1 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$  percorremos o equador saindo do ponto  $Q_1$  até

atingir o ponto  $Q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$ , como ilustra a Figura 8.44.

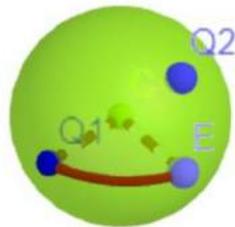


Figura 8.44: Deslocamento de  $Q_1$  até  $Q_2$ .

(i) através do produto de matrizes

$$\begin{bmatrix} x & \sqrt{1-x^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{1-x^2} & -x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix},$$

com  $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq 1$  percorremos um meridiano saindo do ponto  $Q$  até atingir o ponto  $Q_2$ , como ilustra a Figura 8.45.

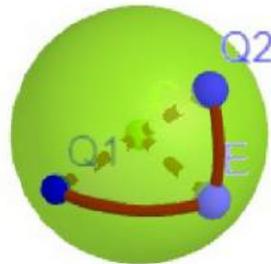


Figura 8.45: Deslocamento de  $Q_1$  até  $Q_2$ .

Já sabemos que dados dois pontos quaisquer sobre uma esfera é possível obter uma matriz ortogonal que relaciona estes pontos dados. Além disso, utilizando o deslocamento de pontos ao longo de uma circunferência através de operações com matrizes, apresentado na seção anterior, podemos nos deslocar ao longo de uma esfera utilizando operações com matrizes. Mais precisamente, dados os pontos  $Q_1$ ,  $Q_2$  pertencentes a esfera  $\mathcal{E}_r$  de acordo com a localização destes pontos em relação aos paralelos e meridianos, podemos encontrar matrizes ortogonais que preenchem através dos meridianos e dos paralelos todo o espaço compreendido entre estes dois pontos.

Em particular, considere as seguintes situações:

- (a) se  $Q_1$  e  $Q_2$  pertencem a um mesmo paralelo, então considerando a matriz ortogonal

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen} \theta & 0 \\ -\text{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

com  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  podemos percorrer todo o paralelo fazendo o percurso de  $Q_1$  à  $Q_2$ . O ângulo  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  chama-se longitude. Por

simplicidade consideraremos o ângulo zero graus como sendo contado exatamente sobre o meridiano de Greenwich. Assim, partindo de Greenwich e contando os graus para o leste  $0 \leq \theta \leq \pi$  nos deslocamos no sentido positivo. Por sua vez, contando para o oeste  $-\pi \leq \theta < 0$  nos deslocamos no sentido negativo.

- (b) se  $Q_1$  e  $Q_2$  pertencem a um mesmo meridiano, então considerando a matriz ortogonal

$$B = \begin{bmatrix} \cos \phi & \text{sen} \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\text{sen} \phi & \cos \phi & 0 \end{bmatrix},$$

com  $0 \leq \phi \leq 2\pi$  podemos percorrer todo o meridiano fazendo o percurso de  $Q_1$  à  $Q_2$ . O ângulo  $0 \leq \phi \leq 2\pi$  chama-se latitude. Por simplicidade consideraremos o ângulo zero graus como sendo contado exatamente sobre o equador. Assim, partindo do equador e contando os graus para o norte  $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$  nos deslocamos no sentido positivo. Por sua vez, contando para o sul  $-\frac{\pi}{2} \leq \phi < 0$  nos deslocamos no sentido negativo.

#### Observação

Aqui norte, sul, leste e oeste são exatamente os pontos cardiais que conhecemos, onde o norte é a calota polar norte e sul é a calota polar sul.

- (c) se os itens anteriores não ocorre, ou seja, se digamos  $Q_1$  está sobre um paralelo e  $Q_2$  está sobre um meridiano, então encontramos a interseção deste paralelo com o respectivo meridiano. Em seguida, nos deslocamos ou sobre o paralelo ou sobre o meridiano até a interseção e por fim completamos o trajeto.

Assim, podemos concluir que o trajeto de voo de uma aeronave entre duas localidades é feito sempre percorrendo os meridianos e os paralelos da esfera  $\mathcal{E}_r$ . Além disso, todo o trajeto de voo é feito através de operações com matrizes, as matrizes  $A$  e  $B$  dadas acima. A Figura 8.46 ilustra o marco zero de contagem da longitude, sobre o meridiano de Greenwich.

## Meridianos



Figura 8.46: Meridiano de Greenwich .

A Figura 8.47 ilustra o marco zero de contagem da latitude, sobre o equador.

## Paralelos



Figura 8.47: Linha do Equador .

### Exemplo 8.10:

Considere a esfera  $\mathcal{E}_r$ . As coordenadas  $30^\circ$  de latitude e  $45^\circ$  de longitude é dada exatamente como sendo o deslocamento partindo, do nosso, marco zero (meridiano de Greenwich)  $30^\circ$  para o norte e em seguida  $45^\circ$  leste, como ilustra a Figura 8.48.

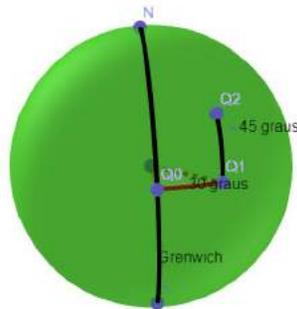


Figura 8.48: Trajeto de  $Q_0$  até  $Q_2$ .

Em termos matriciais, considere o marco zero com sendo a matriz coluna  $Q_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , através do produto de matrizes

$$\begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & \text{sen} \frac{\pi}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\text{sen} \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

obtemos os  $30^\circ$  de latitude em seguida através do produto de matrizes

$$A = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & \text{sen} \frac{\pi}{4} & 0 \\ -\text{sen} \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

obtemos os  $45^\circ$  de longitude.

---

**Exemplo 8.11:**

Determine um trajeto de voo para sair de Miami no estado da Flórida no Estados Unidos e chegar até Madrid na Espanha, sendo que Miami está situado à aproximadamente  $25^{\circ}$  de longitude e  $-80^{\circ}$  de latitude, por sua vez Madrid está situado a  $40^{\circ}$  de longitude e  $3^{\circ}$  de latitude, como ilustra a Figura 8.49



Figura 8.49: Localização de Miami e Madrid .

*Solução.* Para que possamos encontrar as coordenadas, em termos de matrizes, de Miami e Madrid, considere o nosso ponto de partida como sendo a matriz coluna  $Q_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , através do produto de matrizes obtemos inicialmente as coordenadas de Miami em termos matriciais. Percorrendo a partir do ponto  $Q_0$ ,  $-80^{\circ}$  de latitude obtemos as coordenadas

$$\begin{bmatrix} \cos(-80^{\circ}) & \text{sen}(-80^{\circ}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\text{sen}(-80^{\circ}) & \cos(-80^{\circ}) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8.13)$$

Em seguida partindo da expressão (8.13), percorremos  $25^\circ$  de longitude através do produto de matrizes, obtemos

$$\begin{bmatrix} \cos 25^\circ & \operatorname{sen} 25^\circ & 0 \\ -\operatorname{sen} 25^\circ & \cos 25^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(-80^\circ) & \operatorname{sen}(-80^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\operatorname{sen}(-80^\circ) & \cos(-80^\circ) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8.14)$$

Assim, a expressão (8.14) representa, em termos matriciais, as coordenadas de Miami. Estamos prontos para encontrar a trajetória de Miami até Madrid. Determinaremos este trajeto de voo, da seguinte maneira:

- (A) voamos de Miami, utilizando a expressão (8.14), percorrendo  $15^\circ$  de longitude através da operação com matrizes

$$\begin{bmatrix} \cos 15^\circ & \operatorname{sen} 15^\circ & 0 \\ -\operatorname{sen} 15^\circ & \cos 15^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos 25^\circ & \operatorname{sen} 25^\circ & 0 \\ -\operatorname{sen} 25^\circ & \cos 25^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(-80^\circ) & \operatorname{sen}(-80^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\operatorname{sen}(-80^\circ) & \cos(-80^\circ) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

chegamos ao Canadá.

- (B) em seguida partindo do Canadá voamos  $83^\circ$  para o leste até chegarmos ao nosso destino, através da operação com matrizes

$$\begin{bmatrix} \cos 83^\circ & \operatorname{sen} 83^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\operatorname{sen} 83^\circ & \cos 83^\circ & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos 15^\circ & \operatorname{sen} 15^\circ & 0 \\ -\operatorname{sen} 15^\circ & \cos 15^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos 25^\circ & \operatorname{sen} 25^\circ & 0 \\ -\operatorname{sen} 25^\circ & \cos 25^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(-80^\circ) & \operatorname{sen}(-80^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\operatorname{sen}(-80^\circ) & \cos(-80^\circ) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

### 8.3 Mapeando Uma Peça Cilindrica

Suponha um cilindro com diretriz  $\mathcal{C}_r(P_0)$  cuja reta geratriz( $\mathcal{L}$ ) é uma reta perpendicular ao plano que contém  $\mathcal{C}_r(P_0)$  como na Figura 7.23. Sejam  $Q_1$  e  $Q_2$  pontos sobre  $\mathcal{C}_r(P_0, \mathcal{L})$ , teremos alguns casos:

- $Q_1$  e  $Q_2$  pertencem ao plano  $\alpha$  horizontal.

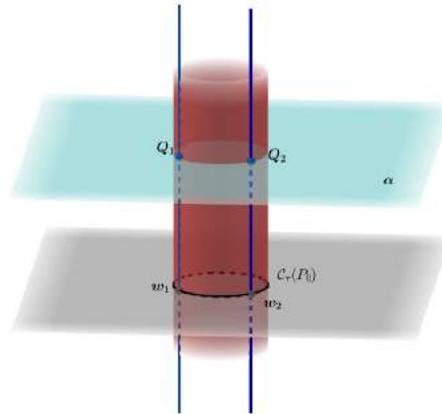


Figura 8.50:  $Q_1$  e  $Q_2$  pertencem ao plano  $\alpha$  horizontal

Neste caso,

$$Q_1 = \begin{bmatrix} w_1 \\ z \end{bmatrix} \text{ e } Q_2 = \begin{bmatrix} w_2 \\ z \end{bmatrix},$$

onde  $w_1$  e  $w_2 \in \mathcal{C}_r(P_0)$ , isto é,

$$w_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \text{ e } w_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Logo, Sejam os pontos  $P_1 = \begin{bmatrix} x_0 + r \\ y_0 \end{bmatrix}$  e  $P_2 = \begin{bmatrix} x_0 - r \\ y_0 \end{bmatrix}$  pontos sobre a circunferência  $\mathcal{C}_r(P_0)$ . Temos quatro casos a considerar:

- (I)  $w_1$  pertence ao arco  $\overleftarrow{\Gamma}(P_1, P_2)$ . Neste caso, seja o arco  $\overleftarrow{\Gamma}(w_1, w_2)$  contido no arco  $\overleftarrow{\Gamma}(P_1, P_2)$ , para algum ponto. Temos que todo ponto  $Q$  pertencente ao arco  $\overleftarrow{\Gamma}(w_1, w_2)$  é dado pela expressão:

$$\begin{bmatrix} \frac{(x-x_0)}{r} & -\frac{\sqrt{r^2-(x-x_0)^2}}{r} \\ \frac{\sqrt{r^2-(x-x_0)^2}}{r} & \frac{(x-x_0)}{r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \quad (8.15)$$

com  $x_1 \geq x \geq x_2$ .

Dessa forma, a expressão:

$$\begin{bmatrix} \frac{(x-x_0)}{r} & -\frac{\sqrt{r^2-(x-x_0)^2}}{r} & 0 \\ \frac{\sqrt{r^2-(x-x_0)^2}}{r} & \frac{(x-x_0)}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.16)$$

com  $x_1 \geq x \geq x_2$ , descreve todo o percurso ao longo do cilindro partindo do ponto  $Q_1$  até chegar em  $Q_2$ , como ilustra a Figura 8.51.

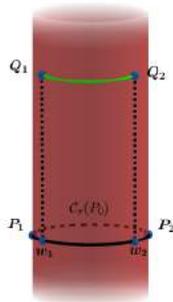


Figura 8.51: Deslocamento do ponto  $Q_1$  até o ponto  $Q_2$  no sentido anti-horário.

- (II)  $w_1$  pertence ao arco  $\overleftarrow{\Gamma}(P_2, P_1)$ . Neste caso, seja o arco  $\overleftarrow{\Gamma}(w_1, w_2)$  contido no arco  $\overleftarrow{\Gamma}(P_2, P_1)$ . Temos que ponto  $W$  pertencente ao arco  $\overleftarrow{\Gamma}(w_1, w_2)$  é dado pela expressão:

$$\begin{bmatrix} \frac{(x-x_0)}{r} & \frac{\sqrt{r^2-(x-x_0)^2}}{r} \\ -\frac{\sqrt{r^2-(x-x_0)^2}}{r} & \frac{(x-x_0)}{r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}, \quad (8.17)$$

com  $x_1 \leq x \leq x_2$ .

Dessa forma, a expressão:

$$\begin{bmatrix} \frac{(x-x_0)}{r} & \frac{\sqrt{r^2-(x-x_0)^2}}{r} & 0 \\ -\frac{\sqrt{r^2-(x-x_0)^2}}{r} & \frac{(x-x_0)}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.18)$$

com  $x_1 \leq x \leq x_2$ , descreve todo o percurso ao longo do cilindro partindo do ponto  $Q_1$  até chegar em  $Q_2$ , como ilustra a Figura 8.52.

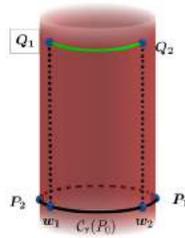


Figura 8.52: Deslocamento do ponto  $Q_1$  até o ponto  $Q_2$  no sentido anti-horário.

- (III)  $w_1$  pertence ao arco  $\overleftarrow{\Gamma}(P_1, P_2)$  e  $w_2$  pertence ao arco  $\overleftarrow{\Gamma}(P_2, P_1)$ . Neste caso, por (8.16) percorremos todo o arco  $\overleftarrow{\Gamma}(Q_1, A_2)$ , onde

$$A_2 = \begin{bmatrix} x_0 - r \\ y_0 \\ z \end{bmatrix},$$

com  $x_1 \geq x \geq x_0 - r$ . Continuamos o processo através da expressão (8.18), com  $x_0 - r \leq x \leq x_2$  até chegar ao ponto  $Q_2$ , como ilustra a Figura 8.53.

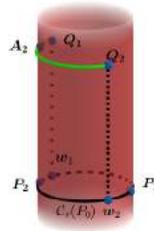


Figura 8.53: Deslocamento do ponto  $Q_1$  até o ponto  $Q_2$  no sentido anti-horário .

- (IV)  $w_1$  pertence ao arco  $\overleftarrow{\Gamma}(P_2, P_1)$  e  $w_2$  pertence ao arco  $\overleftarrow{\Gamma}(P_1, P_2)$ . Neste caso, por (8.18) percorremos todo o arco  $\overleftarrow{\Gamma}(Q_1, A_1)$ , com  $x_1 \leq x \leq x_0 + r$ . Continuamos o processo através da expressão (8.16), com  $x_0 + r \leq x \leq x_2$  até chegar ao ponto  $Q_2$ , como ilustra a Figura 8.54.

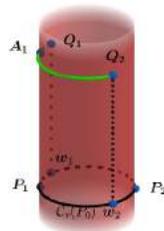


Figura 8.54: Deslocamento do ponto  $Q_1$  até o ponto  $Q_2$  no sentido anti-horário .

- $Q_1$  e  $Q_2$  pertencem a mesma reta geratriz. Nesse caso dizemos que

$$Q_1 = \begin{bmatrix} w \\ z_1 \end{bmatrix} \text{ e } Q_2 = \begin{bmatrix} w \\ z_2 \end{bmatrix},$$

onde  $w$  é um ponto de  $\mathcal{C}_r(P_0)$ . Temos os seguintes casos:

- (I) Se  $z_1 < z_2$  então fazendo uso da expressão

$$\begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix}, \quad (8.19)$$

onde  $z_1 \leq z \leq z_2$ , descrevemos o deslocamento de  $Q_1$  até  $Q_2$  como na Figura 8.55

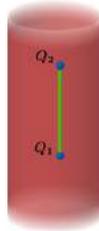


Figura 8.55: deslocamento de  $Q_1$  até  $Q_2$

(II) Se  $z_1 > z_2$  fazemos uso da expressão (8.19), com  $z_2 \geq z \geq z_1$  como ilustrado na Figura 8.56.

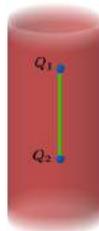


Figura 8.56: deslocamento de  $Q_1$  até  $Q_2$

- No caso em que  $Q_1$  e  $Q_2$  não estão no mesmo plano horizontal e também não estão na mesma reta geratriz, isto é,

$$Q_1 = \begin{bmatrix} w_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad Q_2 = \begin{bmatrix} w_2 \\ z_2 \end{bmatrix},$$

como  $w_1$  e  $w_2$  pertencentes a  $\mathcal{C}_r(P_0)$ , devemos considerar alguns casos:

- (I)  $\overleftarrow{\Gamma}(w_1, w_2)$  contido no arco  $\overleftarrow{\Gamma}(P_1, P_2)$  e  $z_1 < z_2$ . Nesse caso, por (8.16) com  $x_1 \geq x \geq x_2$  e  $z = z_1 + (x_1 - x) \cdot \frac{z_2 - z_1}{x_1 - x_2}$ , descrevemos

o deslocamento de  $Q_1$  em direção a  $Q_2$  como ilustrado na Figura 8.57.

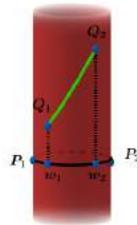


Figura 8.57: Descolamento de  $Q_1$  até  $Q_2$ .

- (II)  $\overleftarrow{\Gamma}(w_1, w_2)$  contido no arco  $\overleftarrow{\Gamma}(P_1, P_2)$  e  $z_2 < z_1$ . Como anteriormente, por (8.16) com  $x_1 \geq x \geq x_2$  e  $z = +(x_1 - x) \cdot \frac{z_1 - z_2}{x_1 - x_2}$  descrevemos o deslocamento de  $Q_1$  em direção a  $Q_2$  sobre o cilindro como ilustra a Figura 8.58.

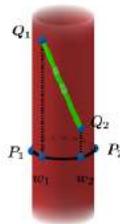
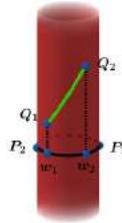
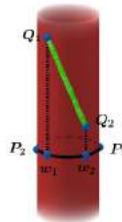


Figura 8.58: deslocamento de  $Q_1$  até  $Q_2$

- (III)  $\overleftarrow{\Gamma}(w_1, w_2)$  contido no arco  $\overleftarrow{\Gamma}(P_2, P_1)$  e  $z_1 < z_2$ , usamos (8.18), com  $x_2 \leq x \leq x_1$  e  $z = z_1 + (x - x_2) \cdot \frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1}$ , descrevemos a trajetória de  $Q_1$  até  $Q_2$  como ilustra a Figura 8.59.

Figura 8.59: Deslocamento de  $Q_1$  até  $Q_2$ 

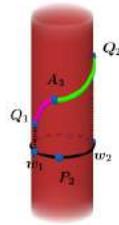
- (IV)  $\overleftarrow{\Gamma}(w_1, w_2)$  contido no arco  $\overleftarrow{\Gamma}(P_2, P_1)$  e  $z_2 < z_1$ , usamos (8.18), com  $x_2 \leq x \leq x_1$  e  $z = z_1 + (x - x_2) \cdot \frac{z_1 - z_2}{x_2 - x_1}$ , descrevemos a trajetória de  $Q_1$  até  $Q_2$  como ilustra a Figura 8.60.

Figura 8.60: Deslocamento de  $Q_1$  até  $Q_2$ 

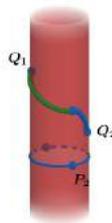
- (V)  $w_1$  pertence ao arco  $\overleftarrow{\Gamma}(P_1, P_2)$  e  $w_2$  pertence ao arco  $\overleftarrow{\Gamma}(P_2, P_1)$  e  $z_1 < z_2$ . Neste caso, por (8.16) percorremos todo o arco  $\overleftarrow{\Gamma}(Q_1, A_3)$ , onde

$$A_3 = \begin{bmatrix} x_0 - r \\ y_0 \\ z_3 \end{bmatrix},$$

com  $z_1 < z_3 < z_2$ ,  $x_1 \geq x \geq x_0 - r$  e  $z = z_1 + (x_1 - x) \cdot \frac{z_3 - z_1}{x_1 - (x_0 - r)}$ . Continuamos o processo através da expressão (8.18), com  $x_0 - r \leq x \leq x_2$  e  $z = z_3 + [x - (x_0 - r)] \cdot \frac{z_2 - z_3}{x_2 - (x_0 - r)}$ , até chegar ao ponto  $Q_2$ , como ilustra a Figura 8.61.

Figura 8.61: Deslocamento de  $Q_1$  até  $Q_2$ .

- (VI)  $w_1$  pertence ao arco  $\overleftarrow{\Gamma}(P_1, P_2)$ ,  $w_2$  pertence ao arco  $\overleftarrow{\Gamma}(P_2, P_1)$  e  $z_1 > z_2$ . Neste caso, por (8.16) percorremos todo o arco  $\overleftarrow{\Gamma}(Q_1, A_3)$ , com  $z_1 > z_3 > z_2$ ,  $x_1 \geq x \geq x_0 - r$  e  $z = z_1 - (x_1 - x) \cdot \frac{z_1 - z_3}{x_1 - (x_0 - r)}$ . Continuamos o processo através da expressão (8.18), com  $x_0 - r \leq x \leq x_2$  e  $z = z_3 + [x - (x_0 - r)] \cdot \frac{z_3 - z_2}{x_2 - (x_0 - r)}$ , até chegar ao ponto  $Q_2$ , como ilustra a Figura 8.62.

Figura 8.62: Deslocamento de  $Q_1$  até  $Q_2$ .

- (VII)  $w_1$  pertence ao arco  $\overleftarrow{\Gamma}(P_2, P_1)$  e  $w_2$  pertence ao arco  $\overleftarrow{\Gamma}(P_1, P_2)$ , com  $z_1 < z_2$ . Neste caso, definimos um ponto

$$A_4 = \begin{bmatrix} x_0 + r \\ y_0 \\ z_4 \end{bmatrix},$$

$z_1 < z_4 < z_2$ . Então por (8.18) percorremos todo o arco  $\overleftarrow{\Gamma}(Q_1, A_4)$ ,

com  $x_1 \leq x \leq x_0 + r$  e  $z = z_1 + (x - x_1) \cdot \frac{z_4 - z_1}{x_0 + r - x_1}$ . Continuamos o processo através da expressão (8.16), com  $x_0 + r \leq x \leq x_2$  e  $z = z_4 + (x_0 + r - x) \cdot \frac{z_2 - z_4}{x_0 + r - x_2}$ , até chegar ao ponto  $Q_2$ , como ilustra a Figura 8.63.

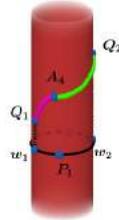


Figura 8.63: Deslocamento de  $Q_1$  até  $Q_2$ .

(VIII)  $w_1$  pertence ao arco  $\overleftarrow{\Gamma}(P_2, P_1)$  e  $w_2$  pertence ao arco  $\overleftarrow{\Gamma}(P_1, P_2)$ , com  $z_1 > z_2$ . Como feito anteriormente, definimos  $A_4$  de tal forma que  $z_2 < z_4 < z_1$ , e então por (8.18) percorremos todo o arco  $\overleftarrow{\Gamma}(Q_1, A_4)$ , com  $x_1 \leq x \leq x_0 + r$  e  $z = z_1 - (x - x_1) \cdot \frac{z_1 - z_4}{x_0 + r - x_1}$ , assim percorremos o cilindro partindo de  $Q_1$  até  $A_4$ . Agora vamos partir de  $A_4$  até  $Q_2$  fazendo uso da expressão (8.16), com  $x_0 + r \leq x \leq x_2$  e  $z = z_4 - (x_0 + r - x) \cdot \frac{z_4 - z_2}{x_0 + r - x_2}$ , como indica a Figura 8.64

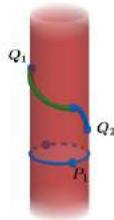


Figura 8.64: Deslocamento de  $Q_1$  até  $Q_2$

## 8.4 O Scanner 3D

A digitalização 3D é uma área de estudo que nos últimos anos vem ganhando consideráveis destaques com a contribuição de diversas técnicas de visão computacional e computação gráfica.

Em relação a interação com o objeto que será digitalizado, classificamos as técnicas de digitalização 3D em passivas e ativas. Esta interação com o objetos que será digitalizado pode ser por toque ou através da projeção de luz (radiação) sobre o objeto.

Os métodos ópticos passivos, são baseados na imagem do objeto fazendo uso da iluminação ambiente ou difusa. Estas metodologias utilizam uma ou duas câmeras para a captura das imagens em pontos fixos ou com movimentação.

Os métodos ópticos ativos, são classificados em: com contato e sem contato. Métodos com contato fazem uso de algum tipo de instrumento de apalpação que quando tocam a superfície em algum ponto específico, estabelece o seu posicionamento. Nos métodos sem contatos, existe a irradiação de luz nos espectros visível ou invisível, radiação ou algum tipo de energia sobre a superfície.

Os equipamentos que fazem uso dos métodos ativos sem contato são em geral capazes de detectar quantidades de luz (energia) refletida ou absorvida e então atribuir coordenadas a alguns pontos do objeto.

Os métodos utilizados em equipamentos como ressonância magnética e tomografia computadorizada, apesar de não utilizarem luz no espectro visível e invisível, serão classificados como ativos, pois também existe irradiação de energia e verificação de absorção ou reflexão.

Aplicaremos uma técnica de digitalização em que representaremos os pontos no sobre a superfície do objeto através de uma matriz coluna  $3 \times 1$  para gerar uma nuvem de pontos, como ilustra a Figura 8.65.



Figura 8.65: Nuvem de pontos de um objeto escaneado

Não é fácil reconhecer que objeto está sendo representado através da nuvem de pontos acima. Nosso objetivo é ensinar uma máquina reconhecer estes tipos de objetos dados através de nuvens de pontos. Os scanners de luz estruturada, como ilustra a Figura 8.66, fazem uso desta metodologia de forma a estabelecer a correspondência entre os pontos projetados e os pontos capturados pela câmera.



Figura 8.66: Scanner

Em outras palavras esta técnica permite estabelecer uma formulação matemática simplificada, como ilustra a Figura 8.67, que permite obter uma boa compreensão do processo.

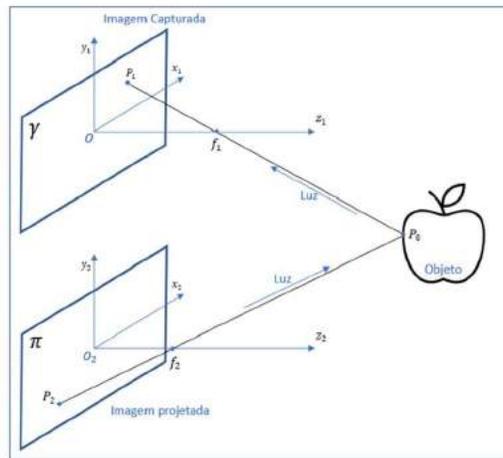


Figura 8.67: Esquema de formulação

Dado um ponto  $Q$  sobre o objeto, representamos este ponto por uma matriz coluna  $P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ , tal que:

- o ponto focal da imagem captura é dado por  $F_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_1 \end{bmatrix}$ ;
- o ponto no objeto que será digitalizado  $P_0 = \begin{bmatrix} x_{p_0} \\ y_{p_0} \\ z_{p_0} \end{bmatrix}$ ;
- o ponto correspondente (ou ponto determinado pelo sensor do scanner após a luz refletir do objeto) localizado no plano  $\gamma$ ,  $P_1 = \begin{bmatrix} x_{p_1} \\ y_{p_1} \\ 0 \end{bmatrix}$ .

Considerando que uma reta entre  $P_1$  e  $f_1$  seja traçada, o seu prolongamento

passará também por  $P_0$  e a seguinte equação pode ser definida:

$$P_1 = F_1 + \alpha(P_0 - F_1). \quad (8.20)$$

Utilizando matrizes,

$$\begin{bmatrix} x_{p_1} \\ y_{p_1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} x_{p_0} \\ y_{p_0} \\ z_{p_0} - f_1 \end{bmatrix}. \quad (8.21)$$

Assumindo que o segundo plano  $\pi$  possua um sistema de coordenadas centrado em  $O_2$  seja tal que:

$$O_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad F_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 + f_2 \end{bmatrix}.$$

Supondo que o mesmo ponto  $P_0$  foi considerado pelos dois sistemas de imagens, obtemos as seguintes relações:

$$P_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{p_2} \\ y_{p_2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 + x_{p_2} \\ y_2 + y_{p_2} \\ z_2 \end{bmatrix}. \quad (8.22)$$

Como o mesmo ponto  $P_0$  foi considerado pelos dois sistemas de imagens,

$$P_2 = F_2 + \beta(P_0 - F_2). \quad (8.23)$$

Novamente por matrizes,

$$\begin{bmatrix} x_2 + x_{p_2} \\ y_2 + y_{p_2} \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 + f_2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} x_{p_0} - x_2 \\ y_{p_0} - y_2 \\ z_{p_0} - z_2 - f_2 \end{bmatrix}. \quad (8.24)$$

Assim,

$$x_{p_0} = \frac{f_1 - z_{p_0}}{f_1} x_{p_1}, \quad (8.25)$$

$$y_{p_0} = \frac{f_1 - z_{p_0}}{f_1} y_{p_1}, \quad (8.26)$$

em relação a  $P_1$  (que é um ponto que temos total controle, pois são as coordenadas do o scanner após a luz ser refletida sobre objeto), além disso

$$x_{p_0} = x_2 + \frac{f_2 + z_2 - z_{p_0}}{f_2} x_{p_2}, \quad (8.27)$$

$$y_{p_0} = y_2 + \frac{f_2 + z_2 - z_{p_0}}{f_2} y_{p_2}, \quad (8.28)$$

em relação a  $P_2$  (que também temos total controle, pois são as coordenadas do scanner que utilizamos para emitir luz sobre o objeto), logo

$$z_{p_0} = \frac{f_1 f_2}{f_1 x_{p_2} - f_2 x_{p_1}} \left( x_2 + x_{p_2} - x_{p_1} + \frac{z_2 x_{p_2}}{f_2} \right). \quad (8.29)$$

e

$$z_{p_0} = \frac{f_1 f_2}{f_1 y_{p_2} - f_2 y_{p_1}} \left( y_2 + y_{p_2} - y_{p_1} + \frac{z_2 y_{p_2}}{f_2} \right). \quad (8.30)$$

Assim, temos informações sobre a matriz que representa um ponto sobre o objeto apenas conhecendo as matrizes que representam pontos em relação a saída de luz e a recepção de luz pelo scanner.

Esta formulação matemática descreve uma nuvem de pontos. Para que possamos representar e em seguida editar o objeto descrito por esta nuvem de pontos, utilizaremos operações com matrizes apresentadas nos capítulos anteriores. Não iremos reconhecer todos os tipos de objetos representados por uma nuvem de pontos, apenas aqueles que mantém relação com os sólidos estudados nos capítulos anteriores. Considerando a nuvem de pontos ilustrada nas Figuras 8.68–8.71, determinaremos através de operações com matrizes estes objetos.

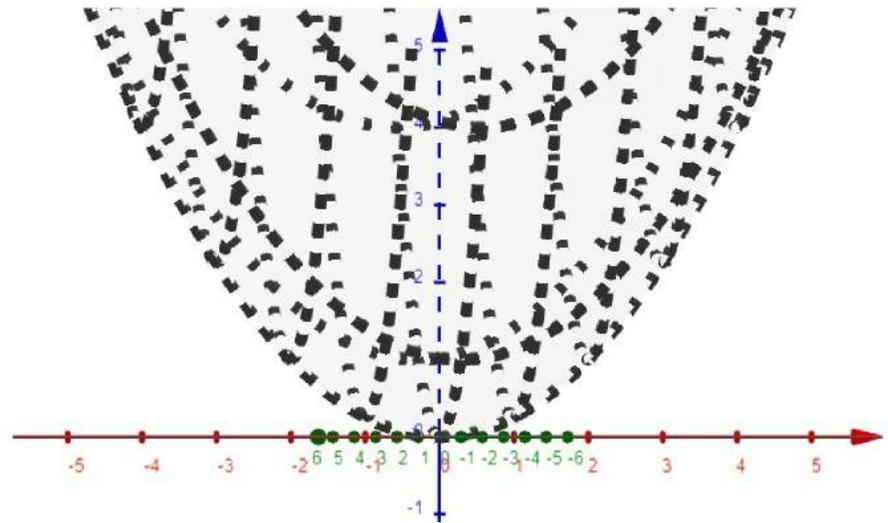


Figura 8.68: Nuvem de pontos

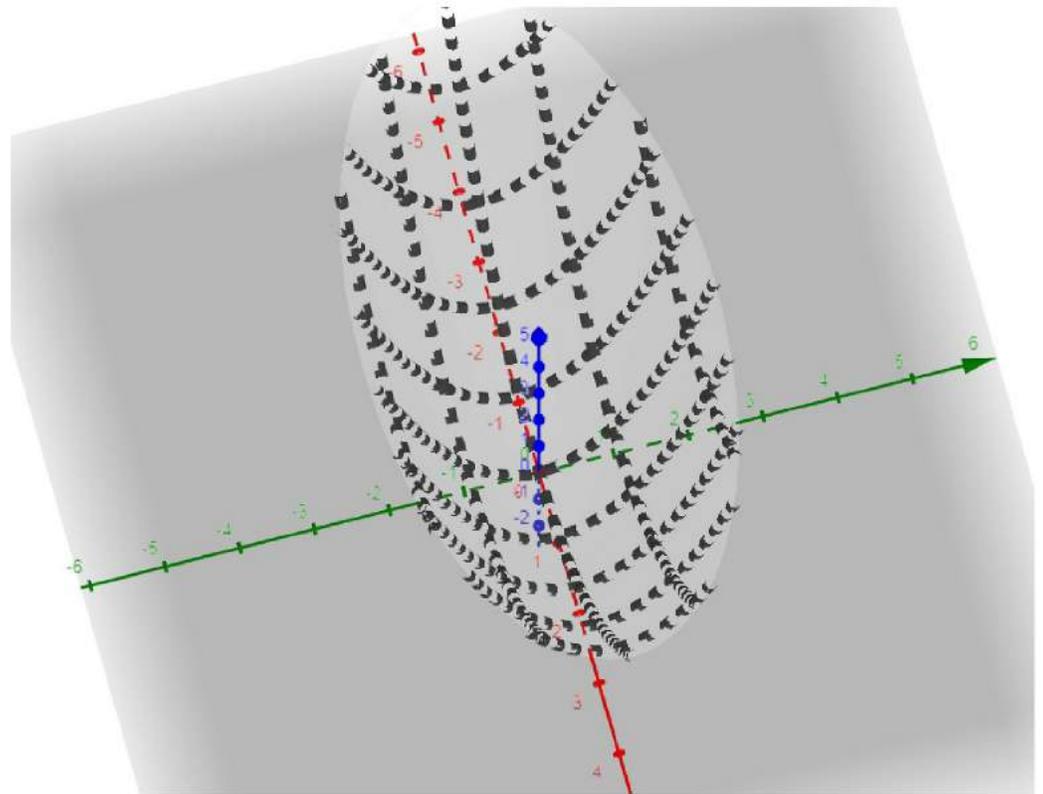


Figura 8.69: Nuvem de pontos

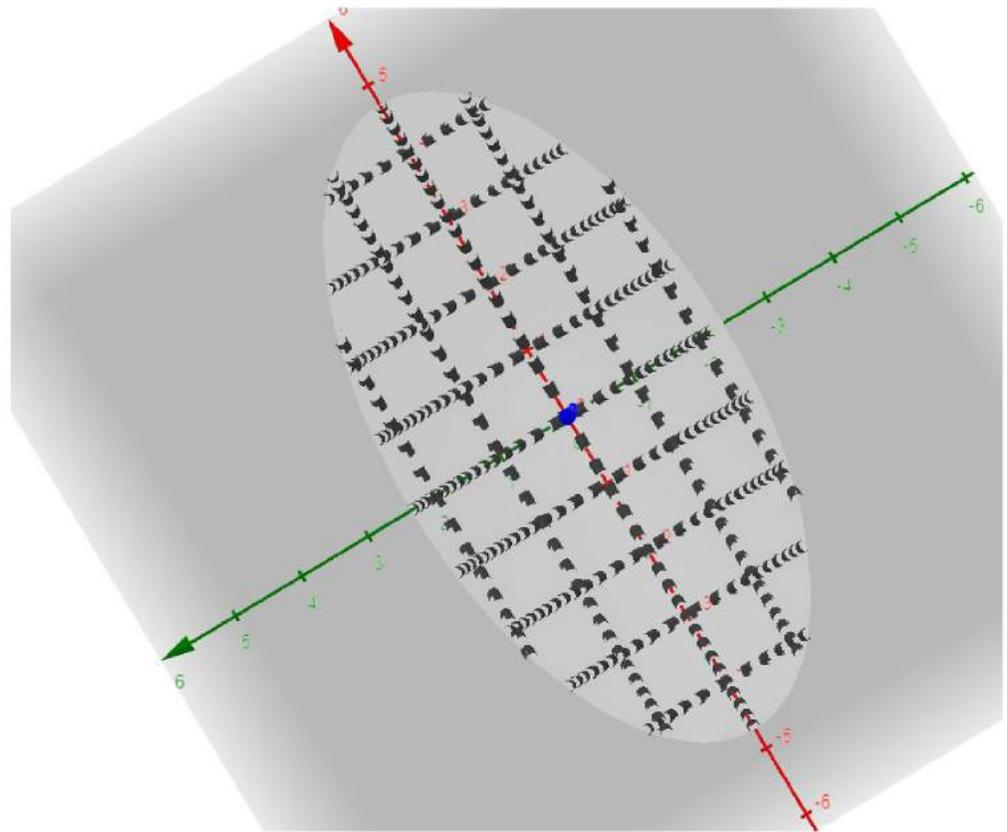


Figura 8.70: Nuvem de pontos

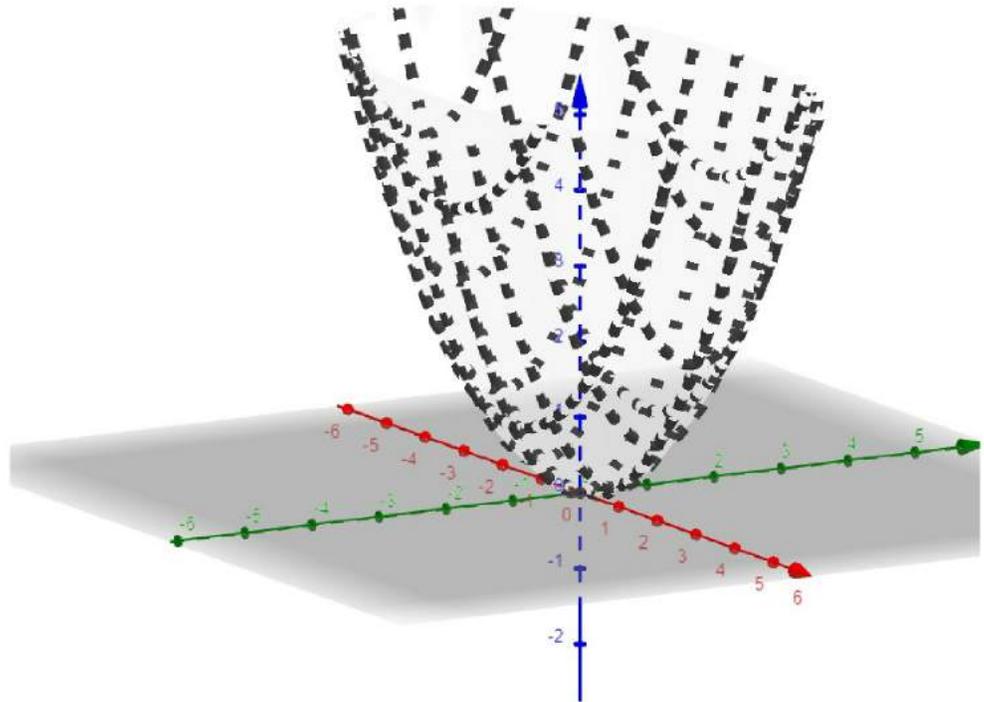


Figura 8.71: Nuvem de pontos

A grosso modo, o que iremos fazer é através da matriz coluna  $P_0$  que representa os pontos do sólido que será escaneado obter informações sobre a matriz coluna  $P_2$  que representa o sólido escaneado. Ou seja, combinando (8.25) com (8.26), obtemos

$$x_{p_0}^2 + y_{p_0}^2 = \left[ \frac{(f_1 - z_0)}{f_1^2} \right]^2 [x_{p_1}^2 + y_{p_1}^2]. \quad (8.31)$$

Desta forma, podemos ensinar a máquina a identificar cada sólido espe-

cífo e através das coordenadas obtidas editar o sólido. Analizaremos cada sólido em casos separados:

- (I) suponhamos que o objeto escaneado seja a esfera de raio  $r > 0$ ,  $\mathcal{E}_r$ , por (8.29) junto com (8.31) temos que as equações

$$x_{p_0}^2 + y_{p_0}^2 + x_{p_0}^2 = \left[ \frac{\left( f_1 - \frac{f_1 f_2}{f_1 x_{p_2} - f_2 x_{p_1}} \left( x_2 + x_{p_2} - x_{p_1} + \frac{z_2 x_{p_2}}{f_2} \right) \right)}{f_1^2} \right]^2 [x_{p_1}^2 + y_{p_1}^2] \\ + \left[ \frac{f_1 f_2}{f_1 x_{p_2} - f_2 x_{p_1}} \left( x_2 + x_{p_2} - x_{p_1} + \frac{z_2 x_{p_2}}{f_2} \right) \right]^2 \quad (8.32)$$

ou

$$x_{p_0}^2 + y_{p_0}^2 + x_{p_0}^2 = \left[ \frac{\left( f_1 - \frac{f_1 f_2}{f_1 y_{p_2} - f_2 y_{p_1}} \left( y_2 + y_{p_2} - y_{p_1} + \frac{z_2 y_{p_2}}{f_2} \right) \right)}{f_1^2} \right]^2 [x_{p_1}^2 + y_{p_1}^2] \\ + \left[ \frac{f_1 f_2}{f_1 y_{p_2} - f_2 y_{p_1}} \left( y_2 + y_{p_2} - y_{p_1} + \frac{z_2 y_{p_2}}{f_2} \right) \right]^2 \quad (8.33)$$

forneçam condições para que o objeto obtido seja a esfera  $\mathcal{E}_r$ . Isto é,

$$r^2 = \left[ \frac{\left( f_1 - \frac{f_1 f_2}{f_1 x_{p_2} - f_2 x_{p_1}} \left( x_2 + x_{p_2} - x_{p_1} + \frac{z_2 x_{p_2}}{f_2} \right) \right)}{f_1^2} \right]^2 [x_{p_1}^2 + y_{p_1}^2] \\ + \left[ \frac{f_1 f_2}{f_1 x_{p_2} - f_2 x_{p_1}} \left( x_2 + x_{p_2} - x_{p_1} + \frac{z_2 x_{p_2}}{f_2} \right) \right]^2 \quad (8.34)$$

ou

$$r^2 = \left[ \frac{\left( f_1 - \frac{f_1 f_2}{f_1 y_{p_2} - f_2 y_{p_1}} \left( y_2 + y_{p_2} - y_{p_1} + \frac{z_2 y_{p_2}}{f_2} \right) \right)}{f_1^2} \right]^2 [x_{p_1}^2 + y_{p_1}^2] \\ + \left[ \frac{f_1 f_2}{f_1 y_{p_2} - f_2 y_{p_1}} \left( y_2 + y_{p_2} - y_{p_1} + \frac{z_2 y_{p_2}}{f_2} \right) \right]^2. \quad (8.35)$$

- (II) Suponhamos que o objeto escaneado seja o cilindro de altura  $h > 0$ ,  $\mathcal{C}_{h,r}$ , temos por (8.31) junto com (8.29) – (8.30) as seguintes expressões que determinam o cilindro

$$\left[ \frac{(f_1 - z_0)^2}{f_1^2} \right] [x_{p_1}^2 + y_{p_1}^2] = r^2 0 < \frac{f_1 f_2 - z_{p_0}}{f_1 x_{p_2} - f_2 x_{p_1}} (x_2 + x_{p_2} - x_{p_1} + \frac{z_2 x_{p_2}}{f_2}) \leq h.$$

ou

$$\left[ \frac{(f_1 - z_0)^2}{f_1^2} \right] [x_{p_1}^2 + y_{p_1}^2] = r^2 0 < z_{p_0} = \frac{f_1 f_2 - z_{p_0}}{f_1 y_{p_2} - f_2 y_{p_1}} (y_2 + y_{p_2} - y_{p_1} + \frac{z_2 y_{p_2}}{f_2}) \leq h.$$

(III) Suponhamos que o objeto escaneado seja o cone de altura  $h > 0$ ,  $\mathcal{T}_r$ , temos por (8.31) junto com (8.29) – (8.30) as seguintes expressões que determinam o cone

$$\left[ \frac{(f_1 - z_0)^2}{f_1^2} \right] [x_{p_1}^2 + y_{p_1}^2] = r^2 0 < \frac{f_1 f_2 - z_{p_0}}{f_1 x_{p_2} - f_2 x_{p_1}} (x_2 + x_{p_2} - x_{p_1} + \frac{z_2 x_{p_2}}{f_2}) \leq \frac{sh}{r}.$$

ou

$$\left[ \frac{(f_1 - z_0)^2}{f_1^2} \right] [x_{p_1}^2 + y_{p_1}^2] = r^2 0 < z_{p_0} = \frac{f_1 f_2 - z_{p_0}}{f_1 y_{p_2} - f_2 y_{p_1}} (y_2 + y_{p_2} - y_{p_1} + \frac{z_2 y_{p_2}}{f_2}) \leq \frac{sh}{r}.$$

### Exemplo 8.12:

Considerando o foco  $f_1 = 1$  e adotando a matriz  $P_1 = \begin{bmatrix} x_{p_1} \\ y_{p_1} \\ 0 \end{bmatrix}$  que representa os pontos sobre o scanner que recebe a luz refletida pelo objeto. Suponhamos que  $x_{p_1}^2 + y_{p_1}^2 = 2$ . Determine que objeto está sendo escaneado na figura 8.72

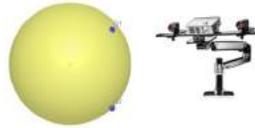


Figura 8.72: Nuvem de pontos

*Solução.* Temos que a matriz que representa os pontos sobre o objeto escaneado é dada por (8.35), ou seja,

$$x_{p_0}^2 + y_{p_0}^2 + z_{p_0}^2 = r^2.$$

Logo o objeto escaneado é uma esfera.

# Referências Bibliográficas

- [1] Crissaff, L., Frensel, K., Delgado, J.: Geometria Analítica. Rio de Janeiro, SBM, 2017.
- [2] de Aguiar, G. B. P., Souza, C. A: A Circunferência Escrita como Soma e Produto de Matrizes. Dissertação de Mestrado. Orientador Cleidinaldo Aguiar Souza. Universidade Federal do Piauí-2021.
- [3] de Aguiar, G. B. P., Souza, C. A: A Circunferência Escrita como Soma e Produto de Matrizes. Revista do Piauiense de Matemática-RPIM. (Artigo Aceito) 2021.
- [4] LIMA, E.; et al. A Matemática do Ensino Médio, vol. 01 e 03. Rio de Janeiro, SBM, 2006.
- [5] IEZZI, G.; MURAKAMI, C. Fundamentos de Matemática Elementar, vol. 04. São Paulo, ed. Atual, 1993.
- [6] Oliveira, M. F.: A Circunferência de Centro na Origem como Produto de Matrizes. Orientador Cleidinaldo Aguiar Souza. Universidade Federal do Piauí-2019.
- [7] Oliveira, M. F., Souza, C. A. A Circunferência de Centro na Origem como Produto de Matrizes. Revista do Professor de Matemática-PMO. 2020. p. 535-550.
- [8] PIRES, E. J. S.; MACHADO, J. A. T.; OLIVEIRA, P. B. de M. Robot trajectory planning using multi-objective genetic algorithm optimization. In: Genetic and Evolutionary Computation Conference, Proceedings, Part I. Seattle, WA, USA: Springer, 2004. (Lecture Notes in Computer Science, v. 3102), p. 615-626. ISBN 3-540-22344-4.
- [9] REIS, G. A, dos. Controle  $H_\infty$  não linear de robôs móveis com rodas. Dissertação de Mestrado-Universidade de São Paulo, São Carlos, 2005.
- [10] VAZ, J. M.; FABRO, J. A.; Snnap-sistema neural de navegação em ambientes pré-mapeados. In: Proceedings of the IV Brazilian Conference on Neural Networks- IV Congresso Brasileiro de Redes Neurais. 1999. p. 118-123.

